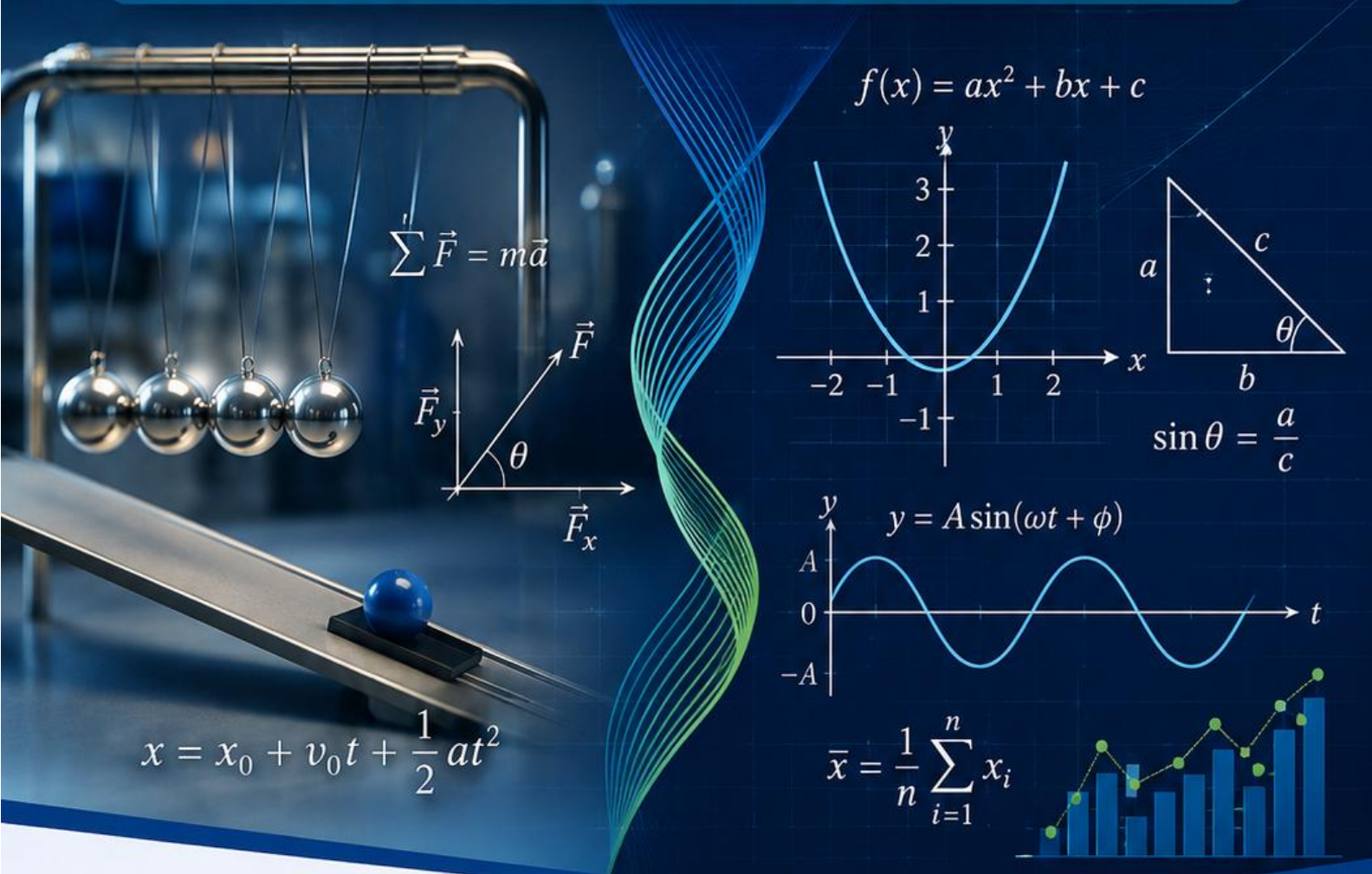


FÍSICA Y MATEMÁTICAS INTEGRADAS

PARA BACHILLERATO

Modelización, razonamiento científico y
resolución de problemas desde un enfoque interdisciplinario



- ERIK JOEL CHINACHI AMÁN
- WILIAN TRAJANO PICO CUEVA
- MARIANITA PIEDAD PALACIOS MORALES
- GLADYS TERESA FIERRO BARRERA
- EDISON FABRICIO RAMOS LLAGUA



EDITORIAL
**Mundos
Alternos**

Créditos

FÍSICA Y MATEMÁTICAS INTEGRADAS PARA BACHILLERATO

Modelización, razonamiento científico y resolución de problemas desde un enfoque interdisciplinario

ERIK JOEL CHINACHI AMÁN

WILIAN TRAJANO PICO CUEVA

MARIANTA PIEDAD PALACIOS MORALES

GLADYS TERESA FIERRO BARRERA

EDISON FABRICIO RAMOS LLAGUA

78-9942-593-52-8

Revisión científica:

Dra. Angelita Martinez – Universidad de Buenos Aires

Phd. Marcia Arbustín – Universidad Nacional de Rosario

Publicación autorizada por: La Comisión Editorial presidida por Andrea Maribel Aldaz

Corrección de estilo y diseño: MGTR. Andrea Maribel Aldaz

Imagen de cubierta: Diseño del autor

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico. El contenido, uso de fotografía, gráficos, cuadros, tablas, y referencias es de exclusiva responsabilidad de los autores.

Los derechos de esta edición Digital son del autor

ISBN: 978-9942-593-52-8



EDITORIAL
**Mundos
Alternos**

Introducción

Comprender el mundo que nos rodea implica observarlo, formular preguntas y encontrar formas de explicar los fenómenos que ocurren en él. El movimiento de un vehículo, la caída de un objeto, las fuerzas que mantienen una estructura en equilibrio, las transformaciones de la energía o los datos obtenidos durante un experimento constituyen situaciones en las que la Física y las Matemáticas se encuentran estrechamente relacionadas. Mientras la Física busca comprender las leyes y principios que explican estos fenómenos, las Matemáticas proporcionan el lenguaje necesario para representarlos, analizarlos y construir predicciones.

Física y Matemáticas Integradas para Bachillerato. Modelización, razonamiento científico y resolución de problemas desde un enfoque interdisciplinario surge desde esta perspectiva. La obra propone superar una enseñanza fragmentada en la que las fórmulas matemáticas aparecen desvinculadas de su significado físico. En su lugar, plantea un aprendizaje en el que cada expresión, gráfica, tabla, función o cálculo pueda ser comprendido como una herramienta para interpretar situaciones reales.

A lo largo del libro, el estudiante avanza progresivamente desde la observación y medición de fenómenos hasta la construcción e interpretación de modelos matemáticos. Conceptos como magnitud, variable, proporcionalidad, función, pendiente, vector, trigonometría, estadística y representación gráfica adquieren sentido al utilizarse para estudiar el movimiento, las fuerzas, la energía y diferentes situaciones experimentales. De esta manera, aprender Matemáticas contribuye a comprender la Física, mientras que los fenómenos físicos proporcionan contextos significativos para desarrollar el razonamiento matemático.

La propuesta concede especial importancia a la resolución de problemas. Los ejercicios y actividades no han sido concebidos únicamente para sustituir valores en ecuaciones conocidas, sino para estimular procesos de observación, interpretación, comparación, argumentación, cálculo, representación y toma de decisiones. Por ello, las situaciones planteadas avanzan desde actividades de reconocimiento y aplicación hasta problemas integradores que requieren relacionar distintos conocimientos y seleccionar estrategias apropiadas para alcanzar una solución.

La experimentación constituye otro de los ejes fundamentales de la obra. Medir una magnitud implica reconocer que los datos obtenidos están sujetos a variaciones e incertidumbres. Organizar mediciones, calcular valores representativos, analizar errores, construir gráficas e identificar tendencias permite comprender que el conocimiento científico se fundamenta en evidencias que deben ser interpretadas críticamente. Esta aproximación favorece una visión de la ciencia como un proceso de construcción, comprobación y revisión permanente.

Asimismo, el libro incorpora la modelización matemática como puente entre la realidad y su representación científica. Un modelo permite simplificar determinados aspectos de un fenómeno, establecer relaciones entre variables y generar predicciones que posteriormente pueden contrastarse con observaciones o resultados experimentales. El estudiante aprende así que una ecuación no constituye solamente una secuencia de símbolos, sino una representación que posee significado, condiciones de aplicación y límites de validez.

En correspondencia con los actuales escenarios educativos, también se reconoce el potencial de las tecnologías digitales para ampliar las posibilidades de aprendizaje e investigación. Simuladores, sensores, hojas de cálculo y otras herramientas permiten explorar fenómenos, modificar variables, obtener datos, construir representaciones y contrastar modelos. Su

incorporación se plantea desde una perspectiva crítica: la tecnología facilita el análisis, pero no sustituye la capacidad de formular preguntas, evaluar resultados y construir conclusiones científicamente fundamentadas.

La estructura de la obra responde a una progresión que conduce desde los fundamentos de la relación entre Física y Matemáticas hacia situaciones de creciente complejidad. El estudio del movimiento permite comprender la relación entre variables y funciones; las fuerzas introducen el pensamiento vectorial y la trigonometría aplicada; el análisis de la energía integra relaciones algebraicas, razones, porcentajes y eficiencia; y la investigación experimental articula medición, estadística, representación gráfica, tecnología y validación de modelos.

El recorrido culmina con un proyecto integrador en el que el estudiante debe asumir un papel activo como investigador: identificar un fenómeno, formular un problema, establecer variables e hipótesis, diseñar una experiencia, obtener o simular datos, analizarlos matemáticamente, construir un modelo, contrastar sus predicciones y comunicar conclusiones sustentadas en evidencia. De esta manera, los conocimientos desarrollados a lo largo de la obra convergen en una experiencia auténtica de razonamiento científico.

Más que enseñar fórmulas para resolver ejercicios, este libro pretende contribuir al desarrollo de una forma de pensar. Observar con atención, medir con criterio, representar con precisión, relacionar variables, interpretar resultados, cuestionar predicciones y utilizar evidencia para construir explicaciones son capacidades necesarias tanto para el aprendizaje científico como para comprender críticamente el mundo contemporáneo.

Desde esta perspectiva interdisciplinaria, Física y Matemáticas dejan de presentarse como campos aislados y se convierten en lenguajes complementarios para explorar la realidad. El desafío propuesto al estudiante es, por tanto, aprender a mirar los fenómenos más allá de lo evidente, descubrir las relaciones que los explican y utilizar el razonamiento científico y matemático para transformar preguntas sobre el mundo en oportunidades de conocimiento.

Nota editorial

La presente obra, Física y Matemáticas Integradas para Bachillerato. Modelización, razonamiento científico y resolución de problemas desde un enfoque interdisciplinario, nace de la necesidad de promover una enseñanza en la que el conocimiento científico y matemático dialogue de manera permanente con la realidad. Su propuesta reconoce que comprender un fenómeno físico implica mucho más que conocer una fórmula: requiere observar, medir, identificar variables, establecer relaciones, representar información, construir modelos e interpretar críticamente los resultados.

Desde esta perspectiva, el libro articula contenidos fundamentales de Física y Matemáticas mediante una secuencia progresiva que vincula la explicación conceptual con ejemplos, ejercicios, problemas contextualizados, análisis de datos y actividades de integración. La intención editorial ha sido favorecer una experiencia de aprendizaje en la que el estudiante comprenda el significado de los procedimientos que utiliza y pueda transferirlos a situaciones diferentes de aquellas en las que fueron aprendidos.

Uno de los principales aportes de esta obra reside en su carácter interdisciplinario. Las Matemáticas se presentan como un lenguaje indispensable para describir y modelizar los fenómenos físicos, mientras que la Física proporciona contextos concretos para comprender el sentido y la utilidad de conceptos como proporcionalidad, funciones, vectores, trigonometría, estadística y representación gráfica. Esta relación permite avanzar desde el cálculo hacia el razonamiento, la interpretación y la construcción de explicaciones sustentadas en evidencia.

La obra incorpora, además, la experimentación, el análisis de datos, la modelización y el uso educativo de tecnologías digitales como componentes esenciales de la formación científica contemporánea. Simuladores, sensores y herramientas de procesamiento de datos amplían las posibilidades de exploración, pero se integran bajo un principio fundamental: ninguna tecnología sustituye la capacidad del estudiante para formular preguntas, evaluar información y argumentar científicamente.

El carácter colectivo e interdisciplinario de esta publicación constituye también una de sus fortalezas. Las experiencias académicas, docentes y profesionales de sus autores convergen en una propuesta que busca aproximar los contenidos científicos a las necesidades reales de los estudiantes de Bachillerato, favoreciendo aprendizajes significativos y una comprensión integrada del conocimiento.

Desde la perspectiva editorial, esperamos que este libro constituya un recurso útil tanto para estudiantes como para docentes y que sus páginas promuevan la curiosidad, la experimentación, la resolución de problemas y el pensamiento crítico. Más allá de proporcionar respuestas, aspiramos a que la obra contribuya a generar nuevas preguntas.

Porque enseñar Física y Matemáticas significa también enseñar a observar el mundo con otros ojos: reconocer patrones donde aparentemente existe incertidumbre, encontrar relaciones detrás de los fenómenos y comprender que cada medición, gráfica, ecuación y modelo puede convertirse en una herramienta para interpretar la realidad.

La Editorial

BIOGRAFÍAS

Erik Joel Chinachi Amán

Es un profesional ecuatoriano cuya trayectoria académica y profesional integra la Ingeniería, la Educación, las Matemáticas, la Física y la investigación científica. Su perfil se caracteriza por una visión interdisciplinaria orientada hacia la innovación educativa, la transformación digital y la incorporación de tecnologías emergentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Realizó su formación en el campo de la Ingeniería en la Universidad Técnica de Ambato (UTA), donde desarrolló competencias relacionadas con la tecnología, los sistemas, el pensamiento lógico y la resolución de problemas. Posteriormente, amplió su preparación académica en el ámbito educativo mediante estudios en la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR) y la Universidad Estatal de Milagro (UNEMI), consolidando una formación que articula los conocimientos técnicos y científicos con fundamentos pedagógicos e investigativos.

En su trayectoria como docente se ha especializado en la enseñanza de Matemáticas y Física, áreas desde las cuales promueve el desarrollo del razonamiento lógico, el pensamiento crítico, la modelización y la aplicación del conocimiento científico a situaciones y problemas de la realidad. Su práctica educativa busca superar la enseñanza centrada exclusivamente en procedimientos y fórmulas, favoreciendo una comprensión integrada de los fenómenos y de las herramientas matemáticas utilizadas para representarlos.

Como Máster Universitario e investigador independiente en América Latina, orienta su trabajo hacia el estudio de la innovación educativa y los procesos de transformación digital. Sus intereses académicos incluyen la utilización de modelos matemáticos, principios físicos y recursos tecnológicos para fortalecer la comprensión de fenómenos científicos en contextos escolares y universitarios.

Su trayectoria refleja un compromiso permanente con la formación continua, la investigación y la construcción de propuestas educativas interdisciplinarias que vinculen ciencia, tecnología y educación para responder a los desafíos contemporáneos de la enseñanza.

Wilian Trajano Pico Cueva

Es un profesional ecuatoriano de la educación con 16 años de trayectoria en la enseñanza de Matemática en Educación Secundaria. Su experiencia se caracteriza por la integración de la práctica docente, la gestión educativa y el liderazgo pedagógico, ámbitos desde los cuales ha contribuido al fortalecimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje y al desarrollo institucional.

Su formación académica evidencia un perfil multidisciplinario que articula conocimientos educativos, administrativos y tecnológicos. Es Ingeniero Industrial en Procesos de Automatización por la Universidad Técnica de Ambato, formación que fortaleció sus competencias relacionadas con el pensamiento lógico, el análisis de procesos y la resolución de problemas. Posteriormente, amplió su preparación profesional al obtener el título de

Magíster en Educación por la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, sede Ambato (PUCESA), y el grado de Magíster en Gestión Educativa por la Universidad Espíritu Santo (UEES).

A lo largo de su trayectoria profesional ha asumido importantes responsabilidades dentro del sistema educativo. Se ha desempeñado como Coordinador de la Red de Educadores del Distrito 18D04 y ha ejercido funciones como Vicerrector de la Unidad Educativa Mariano Benítez, además de desarrollar actividades de coordinación en los ámbitos de gestión pedagógica y administrativa.

Su experiencia de 16 años en la enseñanza de Matemática le ha permitido vincular los conocimientos disciplinares con estrategias orientadas al razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de situaciones contextualizadas. Paralelamente, su desempeño en funciones de coordinación y dirección ha fortalecido su visión integral de los procesos educativos.

Su trayectoria profesional refleja un compromiso permanente con la innovación educativa, el liderazgo pedagógico, la mejora de la calidad de la educación y la formación integral de los estudiantes, promoviendo experiencias de aprendizaje significativas y pertinentes para los desafíos de la sociedad contemporánea.

Marianita Piedad Palacios Morales

Marianita Palacios es una educadora ecuatoriana con 18 años de trayectoria profesional en el ámbito de la docencia, la gestión académica y la dirección institucional. Su recorrido se caracteriza por una sólida formación en las áreas económica, financiera y educativa, así como por un permanente compromiso con la enseñanza y la formación integral de sus estudiantes, particularmente en el campo de las Matemáticas.

Inició su labor docente en la Unidad Educativa Pelileo, institución en la que consolidó las bases de su vocación pedagógica y adquirió importantes experiencias en el trabajo directo con estudiantes. Posteriormente, continuó su carrera en la Unidad Educativa Mariano Benítez, donde desarrolló una destacada trayectoria profesional. Comenzó desempeñándose como docente y, gracias a su experiencia, compromiso y capacidad de liderazgo, asumió progresivamente mayores responsabilidades institucionales, llegando a ejercer los cargos de Vicerrectora y posteriormente Rectora.

A lo largo de sus 18 años como educadora, ha dedicado especial atención a la enseñanza de las Matemáticas, contribuyendo a la formación académica de diversas generaciones de estudiantes. Su experiencia en funciones directivas le ha permitido, además, participar activamente en procesos de planificación, organización, administración y fortalecimiento institucional.

En cuanto a su formación académica, es Economista por la Universidad Central del Ecuador, Máster en Gestión Educativa por la Universidad Particular de Especialidades Espíritu Santo y Máster en Tributación y Derecho Empresarial por la Universidad Técnica de Ambato.

Su perfil profesional integra conocimientos pedagógicos, administrativos, económicos y financieros, proporcionando una perspectiva interdisciplinaria para comprender los procesos educativos y de gestión. Su trayectoria evidencia una evolución constante desde la enseñanza

en el aula hacia el liderazgo académico y la dirección institucional, sustentada en la formación continua, la experiencia y el compromiso con la educación.

ORCID: 0009-0001-2101-9769

Gladys Teresa Fierro Barrera

Se inició en el año 1998, cuando ingresó al entonces Instituto José Ignacio Ordóñez, institución que actualmente se denomina Unidad Educativa Ignacio Ordóñez. En este establecimiento cursó sus estudios hasta el año 2003, etapa que marcó el inicio de su formación académica.

Posteriormente, en el año 2004, continuó su formación en el entonces Colegio Mariano Benítez, actualmente denominado Unidad Educativa Mariano Benítez, institución con la que ha mantenido un vínculo educativo desde ese año hasta la actualidad. Esta trayectoria refleja una relación de larga permanencia con el ámbito educativo y constituye un elemento significativo en su desarrollo personal, académico y profesional. <https://orcid.org/0009-0007-6440-4185> Lugar de trabajo: Unidad Educativa Mariano Benítez, MINEDEC Gladys Teresa Fierro Barrera ha construido una trayectoria estrechamente vinculada con la educación, caracterizada por la constancia, el compromiso y una relación permanente con instituciones que han contribuido significativamente a su formación personal, académica y profesional.

Su recorrido educativo se inició en 1998, cuando ingresó al entonces Instituto José Ignacio Ordóñez, institución que actualmente lleva el nombre de Unidad Educativa Ignacio Ordóñez. En este establecimiento desarrolló una etapa importante de su formación hasta el año 2003, período durante el cual consolidó aprendizajes y experiencias que constituyeron las primeras bases de su trayectoria académica.

En 2004 continuó su proceso formativo en el entonces Colegio Mariano Benítez, actualmente denominado Unidad Educativa Mariano Benítez. Desde ese momento ha mantenido una relación constante con esta institución, vínculo que se extiende hasta la actualidad y que representa una parte fundamental de su desarrollo en el ámbito educativo.

Actualmente, Gladys Teresa Fierro Barrera desarrolla su actividad profesional en la Unidad Educativa Mariano Benítez, perteneciente al Ministerio de Educación. Su permanencia en esta institución evidencia una trayectoria construida desde el conocimiento cercano de la realidad educativa, el compromiso con su comunidad y la valoración de la enseñanza como herramienta fundamental para el desarrollo individual y colectivo.

Su recorrido refleja perseverancia, responsabilidad y sentido de pertenencia. Asimismo, su participación en espacios académicos y de producción intelectual constituye una oportunidad para proyectar su experiencia profesional hacia la generación y difusión del conocimiento, articulando la práctica educativa con procesos de reflexión, actualización y aprendizaje permanente.

ORCID: 0009-0007-6440-4185

EDISON FABRICIO RAMOS LLAGUA

Docente ecuatoriano comprometido con la educación, la formación integral y el aprendizaje permanente. Su trayectoria personal y profesional se ha caracterizado por la búsqueda constante de nuevos conocimientos, el fortalecimiento de sus competencias pedagógicas y una profunda vocación de servicio. Concibe la educación como una oportunidad para transformar realidades, ampliar horizontes y contribuir al desarrollo académico y humano de las nuevas generaciones.

Realizó sus estudios primarios en la Unidad Educativa Domingo Faustino Sarmiento y continuó su formación secundaria en la Unidad Educativa Guayaquil, del cantón Ambato, donde obtuvo el título de Bachiller Técnico en Electrónica de Consumo. Esta primera aproximación al ámbito técnico contribuyó al desarrollo de su pensamiento lógico, analítico y práctico, capacidades que posteriormente complementaría con su formación en el campo educativo.

Cursó sus estudios superiores en la Universidad Técnica de Ambato, donde obtuvo el título de Licenciado en Ciencias de la Educación, mención Educación Básica. Posteriormente, profundizó su preparación profesional en la Universidad Estatal de Milagro, institución en la que alcanzó el grado de Magíster en Educación de Bachillerato, con mención en Pedagogía de la Matemática. Además, cuenta con un diplomado realizado en la Universidad Santander y ha colaborado en la publicación de artículos científicos vinculados con la educación, fortaleciendo así su interés por la investigación y la producción académica.

Actualmente desarrolla su labor profesional en la Unidad Educativa Mariano Benítez, perteneciente al Ministerio de Educación, donde aporta desde su experiencia y preparación a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Su vida también se encuentra profundamente vinculada con la fe y la música. Como músico católico practicante, utiliza la música como una forma de expresar sus convicciones, servir a los demás y transmitir mensajes de esperanza. Se define como una persona entusiasta, perseverante y apasionada por aprender, convencida de que la formación nunca termina. Esta visión se sintetiza en su filosofía personal: “El aprendizaje jamás dejará de abrir puertas al mundo nuevo”.

ORCID: 0009-0005-3544-3500

CAPÍTULO 1. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE LOS FENÓMENOS FÍSICOS

1.1. Física, Matemáticas y comprensión de la realidad

Relación entre fenómenos físicos, observación, medición y representación matemática

La realidad está formada por fenómenos que ocurren continuamente. El desplazamiento de un automóvil, la caída de una pelota, el calentamiento del agua, la propagación del sonido, el funcionamiento de un circuito eléctrico o el movimiento de los planetas son acontecimientos que pueden observarse y estudiarse científicamente.

La Física busca describir y explicar estos fenómenos mediante conceptos, principios y leyes. Las Matemáticas, por su parte, proporcionan herramientas para cuantificar las propiedades observadas, organizar datos, reconocer patrones, establecer relaciones entre magnitudes y construir modelos capaces de representar determinados aspectos de la realidad.

Por ello, estudiar Física y Matemáticas de manera integrada supone recorrer un proceso como el siguiente:

Fenómeno → Observación → Medición → Datos → Representación matemática → Interpretación

El propósito no es únicamente aprender a sustituir valores en fórmulas. Antes de utilizar una ecuación es necesario comprender qué ocurre físicamente, qué cantidades intervienen, cómo pueden medirse y qué significado posee la relación matemática obtenida.

1.1.1. Los fenómenos físicos como punto de partida

Un fenómeno físico es un acontecimiento o proceso relacionado con la materia, la energía, el movimiento o las interacciones entre cuerpos y sistemas. Puede estudiarse mediante observaciones y mediciones sin que sea necesario modificar la composición química de la materia.

En la vida cotidiana encontramos numerosos ejemplos:

- una bicicleta que acelera;
- una pelota que cae;
- una cuchara metálica que aumenta su temperatura;
- un resorte que se deforma;
- una lámpara que transforma energía eléctrica;
- una onda que se propaga por una cuerda;
- un objeto que proyecta una sombra.

Cada fenómeno puede generar preguntas diferentes.

Ejemplo explicado: una pelota que cae

Supongamos que una pelota se deja caer desde cierta altura.

Una observación inicial podría ser:

“La pelota cae hasta llegar al suelo”.

Sin embargo, científicamente podemos formular preguntas más precisas:

¿Cuánto tiempo tarda en caer?

¿Desde qué altura fue liberada?

¿Cómo cambia su velocidad?

¿Caería de la misma manera desde una altura mayor?

El fenómeno cotidiano comienza así a convertirse en un problema científico susceptible de medición y análisis matemático.

Ejercicio 1. Del fenómeno a la pregunta científica

Observa las siguientes situaciones:

- a) Un automóvil que aumenta su rapidez al incorporarse a una autopista.
- b) Un vaso con agua caliente que se deja sobre una mesa.
- c) Una pelota que rueda por una pendiente.
- d) Una liga elástica que se estira al colocarle diferentes objetos.

Para cada situación:

- 1. Describe brevemente qué fenómeno físico observas.
- 2. Formula una pregunta que pueda investigarse mediante mediciones.
- 3. Indica al menos dos características del fenómeno que podrían medirse.
- 4. Explica qué información necesitarías obtener para responder tu pregunta.

1.1.2. De observar a observar científicamente

Observar científicamente significa examinar un fenómeno con una intención definida. No se trata solamente de mirar lo que sucede, sino de reconocer características, identificar cambios, comparar situaciones y formular preguntas.

Por ejemplo:

Observación cotidiana: “Ese ciclista va muy rápido”.

Observación científica: “El ciclista recorrió 100 m en 8 s”.

La primera expresión constituye una apreciación cualitativa. La segunda incorpora información cuantitativa que puede ser analizada.

La transición puede representarse como:

Observación cualitativa → medición → descripción cuantitativa

Ejemplo explicado: comparar dos corredores

Dos estudiantes recorren una pista.

El estudiante A tarda:

$$t_A = 15 \text{ s}$$

El estudiante B tarda:

$$t_B = 18 \text{ s}$$

Si ambos recorrieron 100 m, ahora podemos establecer objetivamente cuál completó el recorrido en menor tiempo.

La medición transforma una percepción en información susceptible de comparación.

Ejercicio 2. De una afirmación cotidiana a una descripción científica

Transforma las siguientes afirmaciones en preguntas o descripciones que puedan comprobarse mediante mediciones:

- a) “La motocicleta es muy rápida”.
- b) “La mochila pesa demasiado”.
- c) “El agua está muy caliente”.
- d) “La mesa es bastante larga”.
- e) “La pelota llegó muy alto”.

En cada caso:

1. Identifica qué característica debería medirse.
2. Indica qué instrumento podría utilizarse.
3. Propón una forma cuantitativa de expresar el resultado.

1.1.3. Identificación de variables

Al estudiar un fenómeno encontramos características que pueden adoptar diferentes valores. Estas cantidades reciben el nombre de **variables**.

Supongamos que registramos el movimiento de un automóvil. Podemos estudiar:

$$t = \text{tiempo} \quad d = \text{distancia} \quad v = \text{velocidad}$$

Estas cantidades pueden cambiar durante el fenómeno.

Si queremos investigar cómo cambia la distancia conforme transcurre el tiempo, podemos establecer una relación:

$$d = f(t)$$

Esta expresión significa que la distancia puede estudiarse como una función del tiempo.

Ejemplo explicado: calentamiento del agua

Supongamos que medimos la temperatura de un recipiente con agua cada minuto.

Podemos considerar:

t =tiempo T =temperatura

La pregunta sería:

¿Cómo cambia la temperatura T conforme aumenta el tiempo t ?

De esta manera, el fenómeno comienza a adquirir una estructura matemática.

Ejercicio 3. Identifica las variables

Un estudiante quiere investigar cómo cambia la longitud de un resorte cuando cuelga diferentes masas de él.

Responde:

1. ¿Qué cantidades podrían medirse?
2. ¿Qué variable podría modificarse deliberadamente?
3. ¿Qué variable debería observarse como respuesta?
4. ¿Qué unidades podrían utilizarse?
5. Escribe mediante símbolos las dos variables principales.

1.1.4. Medición y obtención de datos

La **medición** consiste en comparar una magnitud con una unidad establecida como referencia.

Una medición posee generalmente:

valor numérico+unidad

Por ejemplo:

25 s 1,50 m 4,2 kg

El número por sí solo no proporciona suficiente información. Decir que una longitud es “25” resulta ambiguo; podría significar 25 mm, 25 cm, 25 m o 25 km.

Ejemplo explicado: movimiento de un carrito

Registramos la posición de un carrito cada segundo:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
----------------	-------------------

0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

Las mediciones individuales se han convertido en un **conjunto organizado de datos**.

Al observar la tabla descubrimos que cada segundo la distancia aumenta 2 m.

Ejercicio 4. Organiza e interpreta mediciones

Durante el movimiento de un objeto se obtuvieron los siguientes pares de valores:

(1s,3m),(2s,6m),(3s,9m),(4s,12m)

1. Organiza los datos en una tabla.
2. Identifica las variables.
3. Determina cuánto aumenta la distancia cada segundo.
4. Predice la distancia correspondiente a 5 s.
5. Explica qué patrón observaste.

1.1.5. De los datos a la relación matemática

Las Matemáticas permiten reconocer regularidades que no siempre resultan evidentes al observar directamente un fenómeno.

Retomemos:

t (s)	d (m)
1	2
2	4
3	6
4	8

Calculamos:

td

Para los diferentes valores:

$$12=2, 24=2, 36=2, 48=2$$

La razón permanece constante.

Podemos escribir:

$$d=2t$$

La ecuación resume matemáticamente el patrón observado.

Físicamente, el número 2 indica que el móvil recorre 2 metros por cada segundo.

Ejercicio 5. Descubre la expresión

Un ciclista presenta los siguientes datos:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

1. Calcula d/t para cada fila.
2. ¿Qué regularidad encuentras?
3. Escribe una expresión que relacione d y t .
4. Utilízala para determinar la distancia a los 12 s.
5. Explica físicamente qué representa el número que acompaña a t .

1.1.6. Representación gráfica

Los mismos datos pueden representarse mediante una gráfica.

Si colocamos el tiempo en el eje horizontal y la distancia en el vertical, cada medición se transforma en un punto:

(t,d)

Para:

$$d=2t$$

obtenemos:

$(0,0),(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)$

Los puntos forman una recta.

La pendiente se calcula mediante:

$$m=\Delta t/\Delta d$$

En este caso:

$$m=4-0/8-0=2 \text{ m/s}$$

La pendiente posee un significado físico: representa la rapidez del movimiento.

Por tanto:

pendiente de la gráfica distancia-tiempo=rapidez

Ejercicio 6. De la tabla a la gráfica

Utiliza los siguientes datos:

Tiempo (s)	Distancia (m)
0	0
2	6
4	12
6	18
8	24

1. Representa los datos en un plano cartesiano.
2. Indica qué variable corresponde a cada eje.
3. Une los puntos y describe la forma obtenida.
4. Calcula la pendiente.
5. Interpreta físicamente el valor de la pendiente.
6. Escribe una ecuación que represente el movimiento.

1.1.7. Diferentes representaciones de un mismo fenómeno

Un fenómeno puede representarse mediante diferentes lenguajes:

Descripción verbal

“El móvil recorre 4 metros cada segundo”.

Tabla

t (s)	d (m)
0	0
1	4
2	8
3	12

Expresión algebraica

$$d=4t$$

Representación gráfica

Una recta que pasa por el origen con pendiente:

$$4 \text{ m/s}$$

Las cuatro representaciones describen la misma realidad.

Ejercicio 7. Representa el fenómeno de cuatro maneras

Una persona camina con rapidez constante de 1,5 m/s.

Representa la situación mediante:

1. una descripción verbal;
2. una tabla para los primeros 5 segundos;
3. una expresión matemática;
4. una gráfica distancia-tiempo.

Finalmente, explica qué información aporta cada representación.

1.1.8. Interpretación física de los resultados

Resolver una operación matemática no significa haber terminado un problema físico.

Supongamos que obtenemos:

$$v=12 \text{ m/s}$$

Debemos interpretar el resultado:

El móvil recorre 12 metros por cada segundo bajo las condiciones estudiadas.

También debemos evaluar si el resultado resulta razonable.

Si un cálculo indicara que una persona camina normalmente a:

$$250 \text{ m/s}$$

deberíamos revisar el procedimiento.

El razonamiento científico exige conectar:

resultado matemático $\leftrightarrow$ significado físico

Ejercicio 8. ¿Tiene sentido el resultado?

Un estudiante calcula las siguientes velocidades:

- a) Persona caminando: 1,4 m/s.
- b) Bicicleta: 6 m/s.
- c) Automóvil urbano: 14 m/s.
- d) Persona caminando: 320 m/s.

1. Identifica cuál resultado parece físicamente inconsistente.
2. Justifica tu decisión.
3. Propón dos posibles causas del error.
4. Explica por qué comprobar la razonabilidad de un resultado forma parte de la resolución de un problema.

1.1.9. De la observación al modelo

Cuando una relación matemática representa aspectos relevantes de un fenómeno podemos hablar de un modelo matemático.

Supongamos que un automóvil parte del origen y mantiene:

$$v=15 \text{ m/s}$$

Podemos modelizar su posición mediante:

$$x(t)=15t$$

Después de 10 s:

$$x(10)=150 \text{ m}$$

El modelo permite realizar una predicción.

Sin embargo, supone que el automóvil mantiene su rapidez constante. Si acelera, frena o se detiene, será necesario modificar el modelo.

Por tanto:

modelo $\neq$ realidad completa

Un modelo constituye una representación simplificada de determinados aspectos de la realidad.

Ejercicio 9. Del fenómeno al modelo

Un vehículo parte de un punto de referencia y se desplaza a 8 m/s con rapidez constante.

1. Identifica las variables.
2. Construye una tabla desde $t=0$ hasta $t=5$ s.
3. Escribe la expresión matemática correspondiente.
4. Predice su posición a los 20 s.
5. Explica qué representa el número 8.
6. Indica dos condiciones que deben mantenerse para que el modelo sea válido.
7. Explica qué ocurriría con el modelo si el vehículo comenzara a acelerar.

Integración del proceso

El estudio científico de un fenómeno puede sintetizarse mediante:

Realidad $\rightarrow$ observación $\rightarrow$ variables $\rightarrow$ medición $\rightarrow$ datos $\rightarrow$ tabla $\rightarrow$ gráfica $\rightarrow$ ecuación $\rightarrow$ modelo $\rightarrow$ predicción $\rightarrow$ interpretación

Física y Matemáticas actúan conjuntamente durante todo este recorrido. La Física proporciona el fenómeno y su significado; las Matemáticas permiten cuantificarlo, representarlo y analizarlo.

1.2. Magnitudes físicas y sistemas de unidades

Magnitudes fundamentales y derivadas, Sistema Internacional de Unidades, conversiones y análisis dimensional

La observación científica conduce naturalmente a la necesidad de medir. Para determinar cuánto mide un objeto, cuánto dura un movimiento, qué masa posee un cuerpo o con qué rapidez se desplaza, necesitamos trabajar con magnitudes físicas.

Una magnitud física es una propiedad susceptible de ser medida y expresada cuantitativamente.

Toda medición puede representarse como:

medición = valor numérico + unidad

Por ejemplo:

2,5 m, 15 s, 4 kg

El valor numérico y la unidad forman conjuntamente la información física.

1.2.1. Magnitudes fundamentales

El Sistema Internacional de Unidades establece siete magnitudes fundamentales:

Magnitud	Unidad SI	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Se denominan fundamentales porque sirven como base para definir otras magnitudes.

Ejemplo explicado

En:

$L = 2,4 \text{ m}$

la magnitud es **longitud**, el valor numérico es 2,4 y la unidad es el metro.

En:

$$m=65 \text{ kg}$$

la magnitud es masa, el valor es 65 y la unidad es el kilogramo.

Ejercicio 1. Reconoce las magnitudes fundamentales

Para cada situación identifica la magnitud, el valor y la unidad; posteriormente indica cuál sería su unidad correspondiente en el SI.

- a) Una carrera dura 12,5 s.
- b) Una mochila tiene una masa de 4 kg.
- c) Una habitación mide 5,2 m de largo.
- d) La temperatura termodinámica de un sistema es 300 K.
- e) Por un conductor circula una corriente de 2 A.

1.2.2. Magnitudes derivadas

Las magnitudes derivadas se obtienen mediante relaciones matemáticas entre magnitudes fundamentales u otras magnitudes.

La rapidez:

$$v=td$$

posee como unidad:

$$[v]=sm$$

El área:

$$A=L^2$$

posee:

$$[A]=m^2$$

El volumen:

$$V=L^3$$

posee:

$$[V]=m^3$$

La aceleración:

$$a=\Delta v/\Delta t$$

posee:

$$[a]=\text{m/s}^2$$

La fuerza:

$$F=ma$$

tiene como unidad:

$$\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$

Esta combinación recibe el nombre de **newton**:

$$1\text{N}=1\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$

Ejercicio 2. Construye unidades derivadas

Completa las relaciones siguientes determinando qué unidades resultan:

1. Rapidez: $v=d/t$
2. Aceleración: $a=v/t$
3. Área: $A=L^2$
4. Volumen: $V=L^3$
5. Densidad: $\rho=m/V$
6. Fuerza: $F=ma$

Para cada magnitud:

- a) identifica las magnitudes involucradas;
- b) sustituye sus unidades;
- c) simplifica la expresión;
- d) escribe la unidad resultante.

1.2.3. El Sistema Internacional como lenguaje común

La ciencia requiere que las mediciones puedan ser comunicadas y comparadas.

Supongamos que dos personas expresan una distancia como:

2 km

y: 2000 m

Los valores numéricos son diferentes, pero representan la misma longitud.

Esta equivalencia puede expresarse:

$$2\text{ km}=2000\text{ m}$$

El Sistema Internacional proporciona referencias estandarizadas para evitar ambigüedades y facilitar la comunicación científica.

1.2.4. Múltiplos y submúltiplos

Para expresar cantidades muy grandes o pequeñas se utilizan prefijos asociados a potencias de diez.

Prefijo	Símbolo	Factor
kilo	k	10^3
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

Por ejemplo:

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} \quad 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \quad 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$$

Ejemplo explicado

Una longitud de:

$$3,5 \text{ km}$$

equivale a:

$$3,5 \times 1000 = 3500 \text{ m}$$

Por tanto:

$$3,5 \text{ km} = 3500 \text{ m}$$

Ejercicio 3. Cambia la escala de las mediciones

Realiza las siguientes conversiones:

- a) 4,2 km a m
- b) 350 cm a m
- c) 0,75 m a cm
- d) 12 mm a m
- e) 0,004 m a mm

Después de cada conversión, determina si el valor numérico debe aumentar o disminuir y explica por qué.

1.2.5. Factores de conversión

Una forma sistemática de cambiar unidades consiste en utilizar **factores de conversión**.

Si:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

entonces:

$$1\text{km}1000\text{m}=1$$

Convertimos:

$$2,8\text{ km}$$

mediante:

$$2,8\text{ km}(1\text{km}1000\text{m})$$

Cancelamos km:

$$2,8(1000)\text{m} 2800\text{m}$$

Las unidades funcionan algebraicamente y permiten comprobar si el procedimiento se ha planteado correctamente.

Ejercicio 4. Utiliza factores de conversión

Convierte mostrando explícitamente el factor utilizado:

- a) $5,6\text{ km}\rightarrow\text{m}$
- b) $450\text{ cm}\rightarrow\text{m}$
- c) $2,5\text{ h}\rightarrow\text{s}$
- d) $7500\text{ g}\rightarrow\text{kg}$
- e) $0,008\text{ km}\rightarrow\text{m}$

En cada caso:

1. escribe la equivalencia;
2. construye el factor;
3. cancela la unidad inicial;
4. calcula el resultado;
5. comprueba si el orden de magnitud obtenido resulta razonable.

1.2.6. Conversión de velocidades

Cuando una unidad derivada contiene varias unidades, todas deben convertirse correctamente.

Transformemos:

$$72\text{ km/h}$$

a m/s .

$$72\text{hkm}(1\text{km}1000\text{m})(3600\text{s}1\text{h})$$

Cancelamos:

$$72(3600/1000) \text{ m/s} = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

Ejercicio 5. La velocidad en diferentes unidades

Convierte:

- a) $36 \text{ km/h} \rightarrow \text{m/s}$
- b) $90 \text{ km/h} \rightarrow \text{m/s}$
- c) $10 \text{ m/s} \rightarrow \text{km/h}$
- d) $25 \text{ m/s} \rightarrow \text{km/h}$

Después responde:

1. ¿Qué operación general permite pasar de km/h a m/s?
2. ¿Qué ocurre al realizar la conversión inversa?
3. ¿Por qué 20 m/s y 72 km/h pueden representar exactamente la misma velocidad?

1.2.7. Conversión de áreas y volúmenes

Las unidades elevadas a una potencia requieren especial atención.

Si:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

entonces:

$$1 \text{ m}^2 = (100 \text{ cm})^2 \quad 1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$$

Para volumen:

$$1 \text{ m}^3 = (100 \text{ cm})^3 \quad 1 \text{ m}^3 = 1000000 \text{ cm}^3$$

No elevar el factor de conversión constituye uno de los errores más frecuentes.

Ejercicio 6. El exponente también transforma la unidad

Convierte:

- a) $2 \text{ m}^2 \rightarrow \text{cm}^2$
- b) $5000 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{m}^2$
- c) $0,5 \text{ m}^3 \rightarrow \text{cm}^3$
- d) $250000 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{m}^3$

En cada caso escribe primero la equivalencia de longitud y posteriormente elévala a la potencia correspondiente.

1.2.8. Las unidades como mecanismo de comprobación

Consideremos:

$$d=vt$$

Si:

$$v=8\text{m/s}$$

$$y: t=5\text{s}$$

entonces:

$$d=(8\text{m})(5\text{s})$$

Los segundos se cancelan:

$$d=40\text{m}$$

La unidad obtenida corresponde a una distancia.

Si hubiéramos obtenido 40m/s , sabríamos que existe algún problema, porque esa unidad corresponde a una velocidad.

Ejercicio 7. Detecta el error mediante las unidades

Analiza los siguientes resultados:

- a) Distancia $=45\text{m/s}$
- b) Velocidad $=12\text{m/s}$
- c) Tiempo $=8\text{m}$
- d) Área $=24\text{m}^2$
- e) Aceleración $=3\text{m/s}^2$

Para cada uno:

1. determina qué unidad debería poseer la magnitud;
2. identifica los resultados dimensionalmente incompatibles;
3. explica qué tipo de error podría haberse cometido.

1.2.9. Análisis dimensional

El **análisis dimensional** estudia las relaciones físicas mediante las dimensiones fundamentales de las magnitudes.

En mecánica utilizamos principalmente:

$$[L]=\text{longitud} \quad [M]=\text{masa} \quad [T]=\text{tiempo}$$

Para la velocidad:

$$v=td$$

por tanto:

$$[v]=TL \quad [v]=LT^{-1}$$

Para la aceleración:

$$[a]=LT^{-2}$$

Para la fuerza:

$$F=ma$$

entonces:

$$[F]=M(LT^{-2}) \quad [F]=MLT^{-2}$$

Ejercicio 8. Construye dimensiones

Determina las dimensiones de:

- a) velocidad;
- b) aceleración;
- c) área;
- d) volumen;
- e) densidad;
- f) fuerza.

Utiliza exclusivamente M, L y T cuando corresponda.

1.2.10. Homogeneidad dimensional

Una ecuación física debe presentar **coherencia dimensional**.

Consideremos:

$$d=vt$$

El miembro izquierdo posee:

$$[d]=L$$

El miembro derecho:

$$[v][t]=(LT^{-1})(T)=L$$

Por tanto:

$$L=L$$

La expresión es dimensionalmente homogénea.

Ahora consideremos:

$$d=v+t$$

Tendríamos:

$$L=LT^{-1}+T$$

Se intenta sumar velocidad y tiempo, cantidades dimensionalmente diferentes. La expresión no puede representar correctamente una relación física de esa forma.

Ejercicio 9. ¿Puede ser correcta la ecuación?

Analiza dimensionalmente:

a) $d=vt$

b) $v=at$

c) $F=ma$

d) $d=v+t$

e) $v=t^2d$

Para cada expresión:

1. determina las dimensiones del miembro izquierdo;
2. determina las dimensiones del derecho;
3. compara ambos resultados;
4. clasifica la expresión como dimensionalmente homogénea o no homogénea.

1.2.11. Coherencia dimensional y validez física

Una ecuación dimensionalmente incorrecta puede descartarse inmediatamente. Sin embargo, una ecuación dimensionalmente correcta no tiene que ser necesariamente una ley física verdadera.

Por ejemplo:

$$d=vt$$

y

$$d=5vt$$

poseen las mismas dimensiones:

$$L=(LT^{-1})(T)$$

El análisis dimensional no puede decidir cuál representa correctamente un fenómeno concreto.

Para determinar la validez física necesitamos observaciones, mediciones, teoría y evidencia experimental.

Esta distinción resulta fundamental:

coherencia matemática $\square$ = validez física garantizada

Ejercicio 10. Integra magnitudes, unidades y razonamiento

Un automóvil recorre 1,8 km en 90 s.

1. Convierte la distancia al SI.
2. Identifica las magnitudes involucradas.
3. Escribe la ecuación necesaria para calcular la rapidez media.
4. Mantén las unidades durante todo el procedimiento.
5. Calcula la rapidez en m/s.
6. Convierte el resultado a km/h.
7. Comprueba dimensionalmente la ecuación utilizada.
8. Interpreta físicamente el resultado.
9. Explica por qué las dos velocidades obtenidas, aunque tengan valores numéricos diferentes, representan la misma magnitud física.

Idea fundamental

Medir significa transformar propiedades observables de los fenómenos en información cuantitativa. Las magnitudes físicas permiten identificar qué estamos midiendo y las unidades proporcionan una referencia común para expresar los resultados.

Las magnitudes fundamentales constituyen la base del Sistema Internacional, mientras que las magnitudes derivadas se construyen matemáticamente a partir de ellas. Las conversiones permiten expresar una misma cantidad utilizando unidades equivalentes y el análisis dimensional permite verificar la coherencia de numerosas relaciones físicas.

El proceso puede sintetizarse como:

fenómeno $\rightarrow$ magnitud $\rightarrow$ medición $\rightarrow$ unidad $\rightarrow$ relación matemática $\rightarrow$ comprobación dimensional $\rightarrow$ interpretación física

1.3. Variables, constantes y relaciones entre magnitudes

Identificación de variables independientes y dependientes en situaciones físicas

Los fenómenos físicos suelen involucrar cantidades que cambian y otras que permanecen constantes. Comprender cuáles varían, cómo lo hacen y qué relación existe entre ellas

constituye una habilidad fundamental para interpretar situaciones reales y construir modelos matemáticos.

En Física, una **variable** es una magnitud cuyo valor puede cambiar durante un fenómeno, experimento o situación. Una **constante**, en cambio, es una cantidad que permanece fija bajo determinadas condiciones.

Por ejemplo, si estudiamos un automóvil que se desplaza con rapidez constante, podemos considerar:

t =tiempo d =distancia recorrida v =rapidez

La relación entre estas magnitudes puede expresarse mediante:

$$d=vt$$

Si:

$$v=10 \text{ m/s}$$

entonces:

$$d=10t$$

En este modelo, d y t pueden adoptar diferentes valores, mientras que la rapidez permanece constante.

1.3.1. Variables en los fenómenos físicos

Una variable puede representar cualquier magnitud física susceptible de cambiar durante el fenómeno estudiado. Algunos ejemplos son la posición, el tiempo, la temperatura, la presión, la masa, la velocidad, la aceleración, el volumen o la fuerza.

Identificar estas cantidades permite transformar una descripción cotidiana en una situación susceptible de análisis matemático.

Ejemplo explicado: temperatura de una bebida

Una taza de café caliente se deja sobre una mesa. Conforme transcurre el tiempo, su temperatura disminuye.

Podemos representar:

t =tiempo T =temperatura

La relación general puede escribirse como:

$$T=f(t)$$

Esto significa que la temperatura puede estudiarse como una función del tiempo.

Ejercicio 1. Identificación de variables en situaciones físicas

Situación: analiza los siguientes fenómenos:

- a) Una pelota cae desde cierta altura.
- b) Un automóvil acelera después de un semáforo.
- c) Un recipiente con agua se calienta.
- d) Un resorte se estira al colocar diferentes masas.
- e) Una batería se descarga mientras alimenta un dispositivo.

Actividad:

- 1. Identifica al menos dos magnitudes que puedan cambiar en cada situación.
- 2. Representa cada magnitud mediante un símbolo.
- 3. Indica qué variables podrían medirse directamente.
- 4. Propón una posible relación entre las variables identificadas.
- 5. Explica qué información física podría obtenerse al estudiar esa relación.

1.3.2. Variables independientes y dependientes

En muchas investigaciones interesa estudiar cómo cambia una magnitud respecto de otra.

La **variable independiente** es aquella que se modifica, controla o utiliza como referencia durante el estudio.

La **variable dependiente** es la magnitud cuyo comportamiento se observa o mide como respuesta al cambio de la variable independiente.

Supongamos que calentamos agua y registramos su temperatura cada minuto.

Podemos considerar:

t =variable independiente T =variable dependiente

La pregunta científica sería:

¿Cómo cambia la temperatura del agua conforme transcurre el tiempo?

Matemáticamente:

$$T=f(t)$$

Ejemplo explicado: distancia y tiempo

Un móvil se desplaza con rapidez constante y se obtienen los siguientes datos:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
1	4
2	8

3	12
4	16

El tiempo constituye la variable independiente y la distancia, la variable dependiente.

La relación puede expresarse:

$$d=4t$$

Ejercicio 2. Identificación de variables independientes y dependientes

Situación: determina qué magnitud funciona como variable independiente y cuál como variable dependiente.

- La longitud de un resorte cambia cuando aumenta la masa suspendida.
- La distancia recorrida por un móvil cambia conforme transcurre el tiempo.
- La temperatura de un líquido cambia durante el calentamiento.
- La intensidad de corriente cambia al modificar el voltaje aplicado.
- El volumen de un gas cambia cuando se modifica su presión.

Actividad:

- Identifica la variable independiente de cada situación.
- Identifica la variable dependiente.
- Representa ambas mediante símbolos.
- Justifica la clasificación realizada.
- Formula para uno de los casos una pregunta científica que relacione ambas variables.

1.3.3. La función de una variable depende del problema

Una magnitud no es independiente o dependiente por naturaleza. Su función depende de la pregunta que se pretende responder y de la manera en que se diseña el estudio.

Supongamos que preguntamos:

¿Cómo cambia la distancia recorrida conforme transcurre el tiempo?

Podemos considerar:

t =variable independiente d =variable dependiente

En cambio, si la pregunta es:

¿Cuánto tiempo necesita un ciclista para recorrer diferentes distancias?

la distancia puede utilizarse como variable de referencia y el tiempo como cantidad que se registra.

Esto demuestra que la clasificación de las variables debe realizarse siempre dentro del contexto específico del problema.

Ejercicio 3. Clasificación de variables según la pregunta de investigación

Situación: un investigador estudia el movimiento de un ciclista mediante dos preguntas diferentes.

Pregunta A: ¿Cómo cambia la distancia recorrida conforme transcurre el tiempo?

Pregunta B: ¿Cuánto tiempo necesita el ciclista para completar diferentes distancias?

Actividad:

1. Identifica la variable independiente en la pregunta A.
2. Identifica la variable dependiente en la pregunta A.
3. Realiza la misma clasificación para la pregunta B.
4. Compara ambas clasificaciones.
5. Explica por qué una misma magnitud puede desempeñar funciones diferentes según el problema investigado.

1.3.4. Las constantes

Una **constante** es una cantidad que permanece fija dentro de las condiciones establecidas para un fenómeno o modelo.

Consideremos:

$$d=5t$$

El valor:

$$5 \text{ m/s}$$

representa una rapidez constante.

Otro ejemplo aparece en la relación:

$$F=kx$$

donde F representa la fuerza aplicada, x la deformación del resorte y k una constante característica del resorte dentro de determinadas condiciones.

Las constantes permiten caracterizar matemáticamente las relaciones existentes entre variables.

Ejemplo explicado: movimiento uniforme

Si un móvil mantiene:

$$v=3 \text{ m/s}$$

su distancia puede representarse mediante:

$$d=3t$$

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
2	6
4	12
6	18

El número 3 permanece constante y representa la rapidez del móvil.

Ejercicio 4. Identificación e interpretación de una constante física

Situación: el movimiento de un objeto está representado por:

$$d=7t$$

donde d se expresa en metros y t en segundos.

Actividad:

1. Identifica las variables presentes.
2. Determina qué valor permanece constante.
3. Indica la unidad correspondiente a esa constante.
4. Explica su significado físico.
5. Calcula la distancia recorrida en 5 s.
6. Explica cómo cambiaría el movimiento si la constante aumentara de 7 m/s a 10 m/s.

1.3.5. Relaciones entre variables

Las variables pueden relacionarse de distintas maneras. Cuando cambia una de ellas, la otra puede aumentar, disminuir, permanecer constante o experimentar una variación no uniforme.

Consideremos:

$$d=vt$$

Si v permanece constante, la distancia aumenta uniformemente con el tiempo.

En cambio, consideremos el modelo:

$$d=\frac{1}{2}gt^2$$

utilizado bajo determinadas condiciones ideales para representar la distancia recorrida por un cuerpo en caída libre desde el reposo.

En este caso, la distancia depende del cuadrado del tiempo.

Si:

$$t \rightarrow 2t$$

entonces:

$$d \rightarrow 4d$$

La forma de la expresión matemática determina cómo responde una variable cuando cambia otra.

Ejercicio 5. Comparación de relaciones lineales y cuadráticas

Situación: considera las relaciones:

$$A: y = 3x \quad B: y = 3x^2$$

Actividad:

1. Construye una tabla para $x = 1, 2, 3, 4$.
2. Calcula los valores de y para ambas relaciones.
3. Compara cómo aumenta y en cada caso.
4. Determina qué ocurre cuando x se duplica.
5. Identifica cuál relación es lineal y cuál es cuadrática.
6. Explica por qué conocer la forma de una relación resulta importante para interpretar un fenómeno físico.

1.3.6. Representación tabular de relaciones

Las tablas permiten organizar pares de valores y observar cómo cambia una variable respecto de otra.

Consideremos:

Fuerza F (N)	Deformación x (cm)
0	0
2	1
4	2
6	3
8	4

Dentro de las condiciones consideradas, cada aumento de 2 N está asociado con un aumento de 1 cm.

La relación puede expresarse:

$$F = 2x$$

si F se mide en newtons y x en centímetros para este conjunto de datos.

Ejercicio 6. Construcción de una relación matemática a partir de una tabla

Situación: se registran las posiciones de un móvil:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	2
1	5
2	8
3	11
4	14

Actividad:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Determina la posición inicial.
4. Calcula cuánto cambia la posición por cada segundo.
5. Identifica la constante asociada con esa variación.
6. Construye una expresión matemática que represente los datos.
7. Utiliza la expresión para predecir la posición en $t=10$ s.

1.3.7. Representación gráfica de las variables

En una representación cartesiana, por convención, la variable independiente suele colocarse en el eje horizontal y la variable dependiente en el eje vertical.

Consideremos:

$$y=2x$$

La gráfica es una recta que pasa por el origen.

En cambio:

$$y=2x+3$$

también produce una recta, pero cuando $x=0$:

$$y=3$$

El valor inicial adquiere especial importancia en numerosos fenómenos físicos.

Por ejemplo:

$$x=x_0+vt$$

permite representar un movimiento rectilíneo uniforme, donde x_0 es la posición inicial.

Ejemplo explicado

Para:

$$x=5+2t$$

tenemos:

$$x_0=5 \text{ m}$$

y:

$$v=2 \text{ m/s}$$

El móvil comienza a 5 m del origen y su posición aumenta 2 m cada segundo.

Ejercicio 7. Interpretación de parámetros en una relación lineal

Situación: la posición de un móvil está representada por:

$$x=10+4t$$

Actividad:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Explica qué representa físicamente el número 10.
4. Indica su unidad.
5. Explica qué representa físicamente el número 4.
6. Indica su unidad.
7. Calcula la posición para $t=0$ s, $t=2$ s y $t=5$ s.
8. Describe cómo sería la gráfica posición-tiempo.

1.3.8. Construcción de relaciones a partir de datos

Una habilidad fundamental del razonamiento científico consiste en obtener una expresión matemática a partir de datos experimentales.

Consideremos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	3
1	7
2	11
3	15

Observamos que cuando:

$$t=0$$

la posición es:

$$x=3 \text{ m}$$

Además, la posición aumenta 4 m por cada segundo.

Por tanto:

$$x=3+4t$$

La expresión incorpora un valor inicial y una tasa de cambio.

Ejercicio 8. Construcción de un modelo lineal a partir de datos

Situación: durante un proceso de calentamiento se obtienen los siguientes datos:

Tiempo t (s)	Temperatura T (°C)
0	20
1	25
2	30
3	35
4	40

Supón que el patrón observado se mantiene dentro del intervalo considerado.

Actividad:

1. Identifica las variables.
2. Clasifica la variable independiente y la dependiente.
3. Determina la temperatura inicial.
4. Calcula la variación de temperatura por segundo.
5. Construye una expresión de la forma:

$$T=T_0+kt$$

6. Explica el significado físico de T_0 .
7. Explica el significado y la unidad de k .
8. Utiliza el modelo para predecir la temperatura en $t=10$ s.
9. Indica qué condición debe cumplirse para que esa predicción sea razonable.

Idea fundamental

El análisis de variables permite reconocer **qué cambia, respecto de qué cambia y qué permanece constante**.

El proceso puede sintetizarse mediante:

fenómeno $\rightarrow$ variables $\rightarrow$ clasificación $\rightarrow$ medición $\rightarrow$ datos $\rightarrow$ relación matemática $\rightarrow$ interpretación

Identificar variables independientes, dependientes y constantes prepara el camino para estudiar relaciones específicas entre magnitudes, entre ellas la proporcionalidad.

1.4. Proporcionalidad en los fenómenos físicos

Proporcionalidad directa, inversa y aplicaciones en situaciones cotidianas

Numerosos fenómenos físicos presentan relaciones regulares entre sus magnitudes. En algunos casos, cuando una cantidad aumenta, otra lo hace siguiendo una razón constante. En otros, el aumento de una cantidad está acompañado por la disminución de otra.

La **proporcionalidad** proporciona herramientas matemáticas para reconocer estas relaciones, representarlas mediante ecuaciones y utilizarlas para realizar predicciones.

1.4.1. Razones y relaciones entre magnitudes

Una razón permite comparar dos cantidades mediante una división.

Si un móvil recorre:

20 m

en:

4 s

la razón entre distancia y tiempo es:

$4 \text{ s} : 20 \text{ m} = 5 \text{ m/s}$

Si esta razón permanece constante para diferentes pares de valores, existe una relación de proporcionalidad directa.

Ejemplo explicado

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
1	5
2	10
3	15
4	20

Calculamos:

$d/t = 5 \text{ m/s}$

para todos los pares.

Por tanto:

$d \propto t$

y:

$d = 5t$

Ejercicio 1. Identificación de una relación proporcional mediante razones

Situación: analiza los datos:

x y
1 4
2 8
3 12
5 20

Actividad:

1. Calcula y/x para cada par.
2. Compara los resultados.
3. Determina si la razón permanece constante.
4. Identifica la constante de proporcionalidad.
5. Escribe la expresión matemática correspondiente.
6. Predice el valor de y para $x=10$.

1.4.2. Proporcionalidad directa

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar una por determinado factor, la otra se multiplica por el mismo factor.

Matemáticamente:

$$y \propto x$$

y:

$$y=kx$$

donde k representa la constante de proporcionalidad.

Si:

$$x \rightarrow 2x$$

entonces:

$$y \rightarrow 2y$$

Ejemplo físico: distancia y tiempo

Para un movimiento de rapidez constante:

$$d=vt$$

Si:

$$v=8 \text{ m/s}$$

entonces:

$$d=8t$$

La rapidez constituye la constante de proporcionalidad entre distancia y tiempo.

Ejercicio 2. Proporcionalidad directa en el movimiento uniforme

Situación: un automóvil mantiene una rapidez constante de:

$$12 \text{ m/s}$$

Actividad:

1. Calcula la distancia recorrida para $t=0, 2, 4, 6, 8 \text{ s}$.
2. Organiza los resultados en una tabla.
3. Calcula d/t para los valores distintos de cero.
4. Verifica que la razón permanezca constante.
5. Identifica la constante de proporcionalidad y su unidad.
6. Escribe la expresión matemática del movimiento.
7. Predice la distancia recorrida en 15 s .
8. Interpreta físicamente la constante obtenida.

1.4.3. Representación gráfica de una proporcionalidad directa

Toda relación de la forma:

$$y=kx$$

se representa mediante una recta que pasa por el origen.

Esto ocurre porque:

$$x=0 \Rightarrow y=0$$

La pendiente de la recta es:

$$m=\Delta x/\Delta y$$

y coincide con la constante de proporcionalidad:

$$m=k$$

Ejemplo explicado

Para:

$$d=4t$$

la gráfica distancia-tiempo es una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es:

$$4 \text{ m/s}$$

Ejercicio 3. Representación gráfica de una proporcionalidad directa

Situación: considera la relación:

$$y=3x$$

Actividad:

1. Construye una tabla para $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Representa los pares ordenados en un plano cartesiano.
3. Describe la forma de la gráfica.
4. Calcula su pendiente.
5. Compara la pendiente con la constante de proporcionalidad.
6. Explica por qué la gráfica pasa por el origen.

1.4.4. Aplicaciones cotidianas de la proporcionalidad directa

La proporcionalidad directa aparece en múltiples situaciones.

Si cada producto tiene el mismo precio:

$$C=pn$$

donde C representa el costo total, p el precio unitario y n la cantidad.

En un movimiento uniforme:

$$d=vt$$

Para un material de densidad constante:

$$m=\rho V$$

En cada caso existe una cantidad que funciona como constante de proporcionalidad.

Ejercicio 4. Aplicaciones de proporcionalidad directa

Situaciones:

- a) Cada botella contiene 0,75 L de agua. Se utilizan 8 botellas.
- b) Un vehículo mantiene una rapidez de 60 km/h durante 3,5 h.
- c) Un material posee una densidad de 2,5 g/cm³ y un volumen de 20 cm³.

Actividad para cada situación:

1. Identifica las variables.
2. Identifica la constante de proporcionalidad.
3. Escribe la relación matemática correspondiente.
4. Sustituye los datos manteniendo sus unidades.
5. Calcula el resultado.
6. Interpreta físicamente la constante de proporcionalidad.

1.4.5. Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando su producto permanece constante.

Matemáticamente:

$$y \propto \frac{1}{x}$$

y:

$$y = \frac{k}{x}$$

Por tanto:

$$xy = k$$

Si x se duplica:

$$y \rightarrow \frac{1}{2}y$$

Si x se triplica:

$$y \rightarrow \frac{1}{3}y$$

Ejemplo físico: rapidez y tiempo para una distancia fija

Sabemos que:

$$d = vt$$

Si la distancia permanece constante:

$$t = \frac{d}{v}$$

Por tanto:

$$t \propto \frac{1}{v}$$

A mayor rapidez, menor tiempo necesario para recorrer una misma distancia.

Ejercicio 5. Proporcionalidad inversa entre rapidez y tiempo

Situación: un vehículo debe recorrer una distancia fija de:

120 km

Completa:

Rapidez v (km/h) Tiempo t (h)

30

40

60

80

120

Actividad:

1. Calcula el tiempo correspondiente a cada rapidez.
2. Calcula el producto vt en cada caso.
3. Comprueba si el producto permanece constante.
4. Identifica la constante de proporcionalidad y su significado físico.
5. Explica qué ocurre con el tiempo cuando aumenta la rapidez.
6. Escribe la expresión que relaciona t con v .

1.4.6. Representación gráfica de una proporcionalidad inversa

Una relación:

$$y=xk$$

no genera una recta.

Consideremos:

$$y=x12$$

x y

1 12

2 6

3 4

4 3

6 2

12 1

En todos los casos:

$$xy=12$$

La gráfica presenta una curva decreciente: conforme x aumenta, y disminuye.

Ejercicio 6. Construcción e interpretación de una gráfica de proporcionalidad inversa

Situación: considera:

$$y = \frac{24}{x}$$

Actividad:

1. Calcula y para $x=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$.
2. Organiza los resultados en una tabla.
3. Comprueba que xy permanece constante.
4. Representa los puntos en un plano cartesiano.
5. Describe la forma de la gráfica.
6. Explica por qué la representación no corresponde a una recta.
7. Identifica la constante de proporcionalidad.

1.4.7. Comparación entre proporcionalidad directa e inversa

Las dos relaciones pueden compararse mediante sus características matemáticas.

Proporcionalidad directa	Proporcionalidad inversa
$y=kx$	$y=k/x$
$y/x=k$	$xy=k$
Si x se duplica, y se duplica	Si x se duplica, y se reduce a la mitad
Gráfica recta por el origen	Gráfica curva
Cociente constante	Producto constante

No toda relación en la que dos variables aumentan es directamente proporcional, ni toda relación en la que una aumenta y otra disminuye es inversamente proporcional. Debe comprobarse matemáticamente la condición correspondiente.

Ejercicio 7. Clasificación de relaciones entre magnitudes

Situación: analiza las siguientes expresiones:

a)

$$y=5x$$

b)

$$y=\frac{20}{x}$$

c)

$$y=3x+2$$

d)

$$y=x^2$$

e)

$$P=AF$$

considerando F constante en el último caso.

Actividad:

1. Clasifica cada relación como proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa o ninguna de las dos.
2. Justifica matemáticamente cada respuesta.
3. Identifica la constante de proporcionalidad cuando exista.
4. Indica qué prueba utilizarías: cociente constante o producto constante.

1.4.8. Proporcionalidad inversa en la presión

La presión se define mediante:

$$P=AF$$

donde P es la presión, F la fuerza perpendicular aplicada y A el área sobre la que actúa.

Si F permanece constante:

$$P \propto \frac{1}{A}$$

Esto significa que una misma fuerza produce mayor presión cuando se distribuye sobre un área menor.

Ejemplo explicado

Si:

$$F=100 \text{ N}$$

y:

$$A=0,5 \text{ m}^2$$

entonces:

$$P=\frac{F}{A}=\frac{100 \text{ N}}{0,5 \text{ m}^2}=200 \text{ Pa}$$

Ejercicio 8. Relación inversa entre presión y área

Situación: una fuerza constante de:

$$F=100 \text{ N}$$

actúa perpendicularmente sobre diferentes áreas.

Área A (m²) Presión P (Pa)

1,00

0,50

0,25

0,10

Utiliza:

$$P=AF$$

Actividad:

1. Calcula la presión correspondiente a cada área.
2. Comprueba el producto PA.
3. Determina qué cantidad permanece constante.
4. Describe qué ocurre con la presión cuando el área disminuye.
5. Explica por qué la relación entre P y A es inversamente proporcional cuando F permanece constante.
6. Relaciona el resultado con una situación cotidiana en la que un área pequeña produzca una presión mayor.

1.4.9. Diferentes proporcionalidades dentro de una misma ecuación

Una misma ecuación puede contener diferentes relaciones de proporcionalidad dependiendo de cuál variable se mantenga constante.

Consideremos:

$$P=AF$$

Si A permanece constante:

$$P \propto F$$

La presión es directamente proporcional a la fuerza.

Si F permanece constante:

$$P \propto A^{-1}$$

La presión es inversamente proporcional al área.

Por ello, identificar las condiciones del fenómeno resulta imprescindible antes de afirmar qué tipo de proporcionalidad existe.

Ejercicio 9. Análisis de proporcionalidades dentro de una misma relación física

Situación: considera:

$$P=AF$$

Actividad:

1. Analiza la relación entre P y F cuando A permanece constante.
2. Indica el tipo de proporcionalidad.
3. Analiza la relación entre P y A cuando F permanece constante.
4. Indica el tipo de proporcionalidad.
5. Construye un ejemplo numérico para cada caso.
6. Explica por qué una misma ecuación puede contener relaciones directas e inversas.

1.4.10. Reconocimiento de proporcionalidades a partir de datos

Cuando no conocemos previamente la ecuación de un fenómeno, podemos examinar los datos para determinar qué relación existe.

Si:

$$xy=k$$

existe proporcionalidad directa.

Si:

$$xy=k$$

existe proporcionalidad inversa.

Ejemplo explicado

Caso A

x	y
1	6
2	12
3	18
4	24

Tenemos:

$$xy=6$$

Por tanto:

$$y=6x$$

Caso B

x y

1 24

2 12

3 8

4 6

Tenemos:

$$xy=24$$

Por tanto:

$$y=x24$$

Ejercicio 10. Determinación del tipo de proporcionalidad a partir de tablas

Situación: analiza los siguientes conjuntos de datos.

Tabla A

x y

2 10

4 20

6 30

8 40

Tabla B

x y

2 30

3 20

5 12

6 10

Actividad para cada tabla:

1. Calcula el cociente y/x .
2. Calcula el producto xy .
3. Determina cuál de los dos permanece constante.
4. Identifica el tipo de proporcionalidad.
5. Determina el valor de k .
6. Construye la expresión matemática correspondiente.
7. Utiliza la expresión para realizar una predicción con un nuevo valor de x .

1.4.11. La proporcionalidad como modelo matemático

Cuando una relación proporcional describe adecuadamente un fenómeno, puede utilizarse como un modelo matemático sencillo.

Supongamos que un sistema suministra agua a una tasa constante de:

$$0,5 \text{ L/s}$$

Si inicialmente el recipiente está vacío:

$$V=0,5t$$

Después de 10 s:

$$V=0,5(10) \quad V=5 \text{ L}$$

El modelo permite realizar predicciones, pero solamente mientras la tasa de flujo permanezca constante.

Por tanto:

un modelo proporcional es válido bajo determinadas condiciones

Ejercicio 11. Construcción de un modelo de proporcionalidad directa

Situación: un tanque inicialmente vacío recibe agua a una tasa constante de:

$$3 \text{ L/min}$$

Actividad:

1. Identifica las variables.
2. Clasifica la variable independiente y la dependiente.
3. Identifica la constante de proporcionalidad y su unidad.
4. Construye una expresión matemática que relacione volumen y tiempo.
5. Elabora una tabla para $t=0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ min}$.
6. Predice el volumen acumulado después de 12 min.
7. Explica físicamente qué representa la pendiente de una gráfica volumen-tiempo.
8. Indica qué condición debe mantenerse para que el modelo continúe siendo válido.

Actividad integradora. De los datos al modelo proporcional

Un grupo de estudiantes analiza el tiempo necesario para recorrer una distancia fija de:

$$240 \text{ m}$$

a diferentes velocidades.

Velocidad v (m/s)	Tiempo t (s)
2	120
3	80

4	60
6	40
8	30

Actividad:

1. Identifica las variables involucradas.
2. Determina cuál se utiliza como variable independiente en la tabla.
3. Calcula el producto vt para cada par de valores.
4. Identifica el tipo de proporcionalidad.
5. Determina la constante y explica su significado físico.
6. Construye una expresión matemática que relacione t con v .
7. Utiliza el modelo para determinar el tiempo correspondiente a:

$$v=10 \text{ m/s}$$

8. Explica físicamente por qué el tiempo disminuye cuando aumenta la velocidad si la distancia permanece constante.
9. Describe la forma esperada de la gráfica t frente a v .
10. Indica qué condición debe mantenerse para que el modelo utilizado sea válido.
11. Explica qué información física se perdería si únicamente se realizara el cálculo numérico sin interpretar la constante obtenida.

Idea fundamental

La proporcionalidad permite identificar relaciones simples entre magnitudes y expresarlas matemáticamente.

En una **proporcionalidad directa**:

$$y=kx$$

y :

$$xy=k$$

En una **proporcionalidad inversa**:

$$y=xk$$

y :

$$xy=k$$

Sin embargo, reconocer una proporcionalidad exige algo más que observar si las cantidades aumentan o disminuyen. Es necesario comprobar matemáticamente la existencia de una razón constante o de un producto constante, según corresponda.

1.5. Del fenómeno a la expresión matemática

Construcción e interpretación de modelos matemáticos sencillos

Los fenómenos físicos pueden describirse mediante palabras, observaciones y mediciones. Sin embargo, para analizarlos con mayor precisión es necesario identificar las magnitudes que intervienen y determinar cómo se relacionan entre sí. Las Matemáticas proporcionan el lenguaje necesario para expresar esas relaciones mediante símbolos, operaciones, ecuaciones y funciones.

Una **expresión matemática** permite representar de forma simplificada una relación entre magnitudes. Cuando esa expresión describe adecuadamente determinadas características de un fenómeno y permite realizar predicciones bajo ciertas condiciones, puede utilizarse como un **modelo matemático**.

Construir un modelo no consiste únicamente en seleccionar una fórmula. Es necesario comprender qué sucede físicamente, identificar las variables, analizar los datos y reconocer la regularidad existente.

1.5.1. Del fenómeno a las variables

Supongamos que una ciclista se desplaza por una carretera recta manteniendo una rapidez constante de 5 m/s.

Para estudiar su movimiento podemos definir:

- t : tiempo, expresado en segundos.
- d : distancia recorrida, expresada en metros.

Decir que la ciclista mantiene una rapidez de 5 m/s significa que recorre 5 metros por cada segundo transcurrido.

Si transcurre un segundo:

$$d = 5 \text{ m}$$

Si transcurren dos segundos:

$$d = 10 \text{ m}$$

Si transcurren tres segundos:

$$d = 15 \text{ m}$$

Los datos pueden organizarse de la siguiente manera:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20

La distancia siempre corresponde a cinco veces el tiempo. Esta relación puede expresarse como:

$$d = 5t$$

La expresión representa matemáticamente el movimiento mientras la rapidez permanezca constante.

Ejercicio 1. Del fenómeno a la expresión matemática

Situación: un automóvil se desplaza en línea recta con rapidez constante.

Datos:

Rapidez constante: $v = 12 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Construye una tabla para $t = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 s .
4. Determina cuánto aumenta la distancia por cada segundo transcurrido.
5. Escribe una expresión matemática que relacione la distancia con el tiempo.
6. Utiliza la expresión para calcular la distancia recorrida en 15 s .

Interpretación: explica qué significa físicamente el valor 12 m/s dentro del modelo.

1.5.2. Reconocimiento de patrones en los datos

Las mediciones obtenidas durante un experimento pueden mostrar regularidades. Reconocer estas regularidades permite establecer relaciones entre variables sin conocer previamente una ecuación.

Consideremos los siguientes datos:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
2	8
4	16
6	24
8	32

Para los valores diferentes de cero podemos calcular la razón entre distancia y tiempo:

$$8 \text{ m} \div 2 \text{ s} = 4 \text{ m/s}$$

$$16 \text{ m} \div 4 \text{ s} = 4 \text{ m/s}$$

$$24 \text{ m} \div 6 \text{ s} = 4 \text{ m/s}$$

$$32 \text{ m} \div 8 \text{ s} = 4 \text{ m/s}$$

La razón permanece constante:

$$d/t = 4 \text{ m/s}$$

Por tanto:

$$d = 4t$$

El valor 4 m/s representa la rapidez constante del móvil.

Ejercicio 2. Construcción de una expresión a partir de datos

Situación: durante el desplazamiento de un objeto se registraron varias mediciones.

Datos:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
2	14
4	28
6	42
8	56

Actividades:

1. Calcula la razón d/t para los valores de tiempo diferentes de cero.
2. Compara los resultados obtenidos.
3. Determina la constante de proporcionalidad.
4. Indica la unidad correspondiente a la constante.
5. Construye una expresión matemática que represente la relación entre d y t .
6. Utiliza el modelo para calcular la distancia correspondiente a 12 s.
7. Determina el tiempo necesario para recorrer 105 m.

Interpretación: explica qué representa físicamente la constante encontrada.

1.5.3. Modelos con valor inicial

No todos los fenómenos comienzan cuando las variables poseen valor cero. En numerosas situaciones existe una cantidad inicial que debe incorporarse a la expresión matemática.

Consideremos un móvil cuya posición inicial es:

$$x_0 = 10 \text{ m}$$

y que se desplaza con velocidad constante:

$$v = 3 \text{ m/s}$$

Cuando $t = 0$ s, la posición es:

$$x = 10 \text{ m}$$

Después de un segundo:

$$x = 13 \text{ m}$$

Después de dos segundos:

$$x = 16 \text{ m}$$

Los datos pueden organizarse así:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	10
1	13
2	16
3	19
4	22

La relación matemática es:

$$x = 10 + 3t$$

De manera general:

$$x = x_0 + vt$$

El término x_0 representa la posición inicial y v representa la velocidad constante.

Ejercicio 3. Modelo con posición inicial diferente de cero

Situación: un móvil comienza a cierta distancia del origen y se desplaza con velocidad constante.

Datos:

Posición inicial: $x_0 = 6 \text{ m}$

Velocidad constante: $v = 4 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Construye una tabla desde $t = 0 \text{ s}$ hasta $t = 5 \text{ s}$.
4. Identifica la posición inicial.
5. Determina cuánto cambia la posición por cada segundo.
6. Construye una expresión matemática que relacione posición y tiempo.
7. Calcula la posición del móvil en 10 s.
8. Determina el instante en el que alcanza la posición $x = 50 \text{ m}$.

Interpretación: explica qué representan físicamente los valores 6 m y 4 m/s.

1.5.4. Del lenguaje verbal al lenguaje algebraico

Una situación física también puede expresarse inicialmente mediante palabras.

Consideremos el siguiente caso:

Un depósito contiene inicialmente 20 litros de agua y recibe 3 litros adicionales cada minuto.

Podemos definir:

- t : tiempo, en minutos.
- V : volumen de agua, en litros.

El volumen inicial es:

$$V_0 = 20 \text{ L}$$

La tasa de entrada de agua es:

$$q = 3 \text{ L/min}$$

Por tanto:

$$V = 20 + 3t$$

Para $t = 5 \text{ min}$:

$$V = 20 + 3(5)$$

$$V = 35 \text{ L}$$

La expresión matemática conserva la información relevante de la situación original y permite determinar el volumen para diferentes valores de tiempo.

Ejercicio 4. Del lenguaje cotidiano al modelo matemático

Situación: una batería posee inicialmente el 100 % de carga y, de acuerdo con un modelo simplificado, pierde 5 puntos porcentuales por cada hora de funcionamiento.

Datos:

Carga inicial: $C_0 = 100 \%$

Tasa de cambio: $-5 \text{ puntos porcentuales/h}$

Actividades:

1. Define una variable para representar el tiempo.
2. Define una variable para representar la carga restante.

3. Identifica el valor inicial.
4. Explica por qué la tasa de cambio es negativa.
5. Construye una expresión matemática para representar la carga en función del tiempo.
6. Calcula la carga después de 6 h.
7. Determina cuándo alcanzaría el 50 % de carga según el modelo.

Interpretación: explica por qué este modelo simplificado podría no representar exactamente el comportamiento de una batería real durante todo su funcionamiento.

1.5.5. Interpretación física de una expresión

Una ecuación contiene información sobre el fenómeno que representa. Por esta razón, interpretar un modelo significa comprender el significado físico de sus variables, constantes y operaciones.

Consideremos:

$$T = 18 + 2t$$

donde T representa la temperatura en grados Celsius y t el tiempo en minutos.

Cuando $t = 0$:

$$T = 18\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Por tanto, $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ corresponde a la temperatura inicial.

La tasa de cambio es:

$$2\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}$$

Esto significa que la temperatura aumenta dos grados Celsius por cada minuto transcurrido.

Ejercicio 5. Interpretación de los términos de un modelo

Situación: la temperatura de un sistema aumenta uniformemente con el tiempo.

Datos:

Modelo: $T = 22 + 4t$

Temperatura T : expresada en $^{\circ}\text{C}$.

Tiempo t : expresado en minutos.

Actividades:

1. Determina la temperatura inicial.
2. Identifica la tasa de cambio.

3. Escribe la unidad correspondiente a la tasa de cambio.
4. Calcula la temperatura después de 3 min.
5. Determina el instante en el que la temperatura alcanza 50 °C.
6. Escribe una nueva expresión si la temperatura inicial fuera 30 °C y la tasa de cambio se mantuviera.
7. Escribe una nueva expresión si la temperatura inicial permaneciera en 22 °C, pero la tasa fuera 2 °C/min.

Interpretación: explica qué información física proporcionan los valores 22 y 4 dentro del modelo.

1.5.6. Relaciones lineales

Numerosos fenómenos sencillos pueden representarse mediante una expresión de la forma:

$$y = b + kx$$

El término b representa el valor inicial de la variable dependiente y k representa una tasa de cambio constante.

Esta estructura puede aparecer en diferentes situaciones físicas. Por ejemplo:

$$x = x_0 + vt$$

para representar la posición de un móvil;

$$T = T_0 + kt$$

para representar un cambio uniforme de temperatura;

$$V = V_0 + qt$$

para representar el volumen de un recipiente que recibe líquido a una tasa constante.

Aunque la estructura algebraica sea semejante, el significado de las variables y sus unidades depende del fenómeno estudiado.

Ejercicio 6. Una misma estructura matemática en diferentes fenómenos

Situación: una misma estructura algebraica puede utilizarse para representar distintos fenómenos.

Datos:

Modelo general: $y = 10 + 5x$

Contextos:

- A. Posición en función del tiempo.
- B. Volumen en función del tiempo.
- C. Temperatura en función del tiempo.

Actividades:

1. Asigna un significado físico a x y y en cada contexto.
2. Determina qué representa el valor 10 en cada situación.
3. Determina qué representa el valor 5 en cada situación.
4. Asigna unidades coherentes a las variables y constantes.
5. Redacta una situación física concreta para cada contexto.

Interpretación: explica por qué una misma estructura algebraica puede representar fenómenos físicos diferentes.

1.5.7. Modelos no lineales sencillos

No todos los fenómenos físicos presentan una tasa de cambio constante. En algunos casos, una variable cambia de manera no lineal respecto de otra.

Para un objeto que parte del reposo y experimenta una aceleración constante puede utilizarse el modelo:

$$d = \frac{1}{2}at^2$$

Si la aceleración es:

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

entonces:

$$d = t^2$$

Los valores correspondientes son:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

La distancia no aumenta en la misma cantidad durante cada segundo. Esto indica que la relación entre distancia y tiempo no es lineal.

Ejercicio 7. Análisis de un modelo cuadrático

Situación: el desplazamiento de un objeto aumenta de acuerdo con una relación cuadrática.

Datos:

Modelo: $d = 2t^2$

Distancia d : expresada en metros.

Tiempo t : expresado en segundos.

Actividades:

1. Calcula la distancia para $t = 0, 1, 2, 3$ y 4 s.
2. Organiza los resultados en una tabla.
3. Calcula el incremento de distancia entre valores consecutivos.
4. Determina si los incrementos permanecen constantes.
5. Analiza qué ocurre con la distancia cuando el tiempo se duplica.
6. Calcula la distancia correspondiente a 5 s.
7. Describe la forma general que esperas observar en la gráfica.

Interpretación: explica por qué este modelo no representa una relación lineal.

1.5.8. Predicción mediante modelos

Una de las principales utilidades de un modelo matemático consiste en calcular valores que no fueron obtenidos directamente mediante mediciones.

Consideremos:

$$d = 7t$$

Si $t = 20$ s:

$$d = 7(20)$$

$$d = 140 \text{ m}$$

El modelo predice que el móvil habrá recorrido 140 m.

Sin embargo, esta predicción solamente será razonable si el fenómeno continúa cumpliendo las condiciones bajo las cuales se construyó el modelo.

Ejercicio 8. Predicción y límites de validez

Situación: durante cierto intervalo, el movimiento de un vehículo puede representarse mediante un modelo lineal.

Datos:

$$\text{Modelo: } x = 5 + 6t$$

Posición x : expresada en metros.

Tiempo t : expresado en segundos.

Actividades:

1. Determina la posición inicial.
2. Determina la velocidad representada por el modelo.
3. Calcula la posición en 4 s.
4. Predice la posición en 20 s.
5. Indica las condiciones que deben mantenerse para aceptar esa predicción.
6. Supón que el vehículo comienza a frenar en $t = 10$ s. Determina si la expresión puede continuar utilizándose sin modificaciones.

Interpretación: explica por qué una ecuación puede ser matemáticamente correcta y, sin embargo, dejar de representar adecuadamente un fenómeno físico.

1.5.9. Comparación entre predicción y medición

Los modelos matemáticos deben contrastarse con datos obtenidos mediante observaciones o experimentos.

Consideremos el modelo:

$$d = 4t$$

y las siguientes mediciones:

Tiempo t (s)	Distancia predicha (m)	Distancia medida (m)
1	4	3,9
2	8	8,1
3	12	11,8
4	16	16,2

Los valores medidos no coinciden exactamente con los valores predichos. Sin embargo, las diferencias son pequeñas.

Estas variaciones pueden estar asociadas con la precisión de los instrumentos, pequeñas modificaciones del movimiento o características que el modelo simplificado no considera.

Ejercicio 9. Evaluación de un modelo mediante resultados experimentales

Situación: se desea determinar si un modelo representa adecuadamente los datos obtenidos durante un experimento.

Datos:

Modelo: $x = 3t$

Tiempo t (s)	Posición predicha (m)	Posición medida (m)
1	3	3,1
2	6	5,8

3	9	9,2
4	12	11,9
5	15	15,3

Actividades:

1. Calcula la diferencia entre el valor predicho y el valor medido en cada instante.
2. Compara las diferencias obtenidas.
3. Determina si los valores experimentales siguen aproximadamente el comportamiento previsto.
4. Propón dos posibles causas de las diferencias.
5. Evalúa si el modelo puede considerarse útil dentro del intervalo estudiado.

Interpretación: explica por qué una pequeña diferencia entre la predicción matemática y la medición experimental no significa necesariamente que el modelo sea incorrecto.

Actividad integradora. Construcción e interpretación de un modelo matemático

Situación: se estudia experimentalmente el movimiento de un carrito.

Datos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	2
1	6
2	10
3	14
4	18

Actividades:

1. Identifica las variables.
2. Clasifica la variable independiente y la variable dependiente.
3. Determina la posición inicial.
4. Calcula la variación de posición por segundo.
5. Construye una expresión matemática que represente los datos.
6. Utiliza el modelo para calcular la posición en 10 s.
7. Determina el instante en el que el carrito alcanzaría la posición de 50 m.
8. Indica las condiciones que deberían mantenerse para utilizar el modelo.

Interpretación: explica qué representa físicamente cada término de la expresión obtenida y cómo comprobarías experimentalmente la validez del modelo.

Idea fundamental

Una expresión matemática permite representar las relaciones existentes entre las magnitudes de un fenómeno. Su construcción requiere interpretar la situación física, identificar variables, analizar datos y reconocer regularidades.

Un modelo matemático no es simplemente una fórmula para sustituir valores. Es una representación simplificada de determinados aspectos de la realidad que permite describir comportamientos, interpretar relaciones y realizar predicciones dentro de ciertas condiciones.

1.6. Tablas, ecuaciones y representaciones gráficas

Diferentes formas de representar un mismo fenómeno físico

Un mismo fenómeno puede representarse mediante lenguaje verbal, tablas, ecuaciones y gráficas. Cada representación permite destacar determinados aspectos del comportamiento de las variables.

Consideremos un automóvil que mantiene una rapidez constante de 5 m/s.

Podemos describir el movimiento verbalmente:

El automóvil recorre 5 metros por cada segundo transcurrido.

Podemos expresarlo algebraicamente:

$$d = 5t$$

También podemos organizar algunos valores en una tabla:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20

Finalmente, los datos pueden representarse mediante una gráfica distancia-tiempo. En este caso, los puntos forman una recta ascendente que pasa por el origen.

Las diferentes representaciones describen el mismo movimiento y permiten analizarlo desde perspectivas complementarias.

1.6.1. Representación verbal

La descripción verbal proporciona el contexto necesario para comprender qué sucede físicamente.

Consideremos:

Un depósito contiene inicialmente 10 litros de agua y recibe 2 litros adicionales cada minuto.

El volumen inicial es:

$$V_0 = 10 \text{ L}$$

La tasa de entrada es:

$$q = 2 \text{ L/min}$$

La relación matemática correspondiente es:

$$V = 10 + 2t$$

La descripción verbal y la ecuación representan la misma situación mediante lenguajes diferentes.

Ejercicio 1. De la descripción verbal a otras representaciones

Situación: un automóvil comienza a cierta distancia de un punto de referencia y continúa alejándose con velocidad constante.

Datos:

Posición inicial: $x_0 = 20 \text{ m}$

Velocidad constante: $v = 6 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Construye una tabla desde $t = 0 \text{ s}$ hasta $t = 5 \text{ s}$.
4. Construye la ecuación posición-tiempo.
5. Identifica el valor inicial.
6. Identifica la tasa de cambio.

Interpretación: explica cómo la descripción verbal, la tabla y la ecuación representan el mismo fenómeno.

1.6.2. Representación mediante tablas

Las tablas permiten organizar pares de valores correspondientes a distintas variables.

Consideremos:

$$d = 3t$$

Los valores pueden organizarse así:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
1	3
2	6

3	9
4	12

La tabla permite reconocer que la distancia aumenta 3 m por cada segundo transcurrido.

Ejercicio 2. Construcción e interpretación de una tabla

Situación: la posición de un móvil cambia uniformemente con el tiempo.

Datos:

Modelo: $x = 4 + 3t$

Posición x: expresada en metros.

Tiempo t: expresado en segundos.

Actividades:

1. Calcula la posición para $t = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 s.
2. Organiza los resultados en una tabla.
3. Determina la posición inicial.
4. Calcula cuánto aumenta la posición por segundo.
5. Utiliza el patrón para predecir la posición en 8 s.

Interpretación: explica qué información resulta especialmente fácil de identificar mediante la tabla.

1.6.3. De una tabla a una ecuación

Una tabla también puede utilizarse como punto de partida para determinar una relación matemática.

Consideremos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	5
1	8
2	11
3	14

La posición inicial es:

$$x_0 = 5 \text{ m}$$

La posición aumenta 3 m por cada segundo.

Por tanto:

$$x = 5 + 3t$$

Ejercicio 3. Construcción de una ecuación a partir de una tabla

Situación: se estudia la posición de un móvil durante un movimiento uniforme.

Datos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	8
2	18
4	28
6	38
8	48

Actividades:

1. Determina la posición inicial.
2. Calcula cuánto cambia la posición durante cada intervalo de 2 s.
3. Determina la variación de posición por segundo.
4. Construye una ecuación de la forma $x = x_0 + vt$.
5. Calcula la posición correspondiente a 15 s.
6. Comprueba la ecuación sustituyendo dos pares de valores originales.

Interpretación: explica qué representan físicamente x_0 y v .

1.6.4. De una tabla a una gráfica

Cada fila de una tabla puede interpretarse como un par ordenado.

Consideremos:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
1	4
2	8
3	12

Los pares ordenados correspondientes son:

(0, 0), (1, 4), (2, 8), (3, 12)

Al representarlos en un plano cartesiano se obtiene una recta ascendente.

Ejercicio 4. Construcción de una gráfica a partir de una tabla

Situación: se registran las distancias recorridas por un móvil.

Datos:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0

2	10
4	20
6	30
8	40

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Representa los datos en un plano cartesiano.
4. Rotula cada eje indicando la magnitud y su unidad.
5. Describe la forma de la gráfica.
6. Calcula la pendiente utilizando dos puntos.
7. Construye la ecuación correspondiente.

Interpretación: explica qué representa físicamente la pendiente obtenida.

1.6.5. Pendiente y comportamiento físico

La pendiente de una recta puede calcularse mediante:

$$m = \Delta y / \Delta x$$

En una gráfica posición-tiempo:

$$v = \Delta x / \Delta t$$

Por tanto, la pendiente representa la velocidad del móvil.

Consideremos dos movimientos:

$$x_a = 3t$$

$$x_b = 7t$$

Las velocidades correspondientes son:

$$v_a = 3 \text{ m/s}$$

$$v_b = 7 \text{ m/s}$$

La recta correspondiente al móvil B presenta mayor inclinación porque su posición cambia más rápidamente respecto del tiempo.

Ejercicio 5. Comparación de movimientos mediante pendientes

Situación: dos ciclistas se desplazan en línea recta con rapidez constante.

Datos:

Ciclista A: $d_a = 4t$

Ciclista B: $d_b = 6t$

Distancia: expresada en metros.

Tiempo: expresado en segundos.

Actividades:

1. Construye una tabla para ambos ciclistas desde $t = 0$ s hasta $t = 5$ s.
2. Representa ambas relaciones en un mismo sistema cartesiano.
3. Calcula la pendiente de cada recta.
4. Calcula la distancia recorrida por cada ciclista en 10 s.
5. Determina la diferencia entre las distancias recorridas.

Interpretación: identifica qué ciclista se desplaza con mayor rapidez y explica cómo puede determinarse tanto matemática como gráficamente.

1.6.6. Relaciones lineales con valor inicial

Una recta no necesariamente representa una proporcionalidad directa.

Consideremos:

$$x = 10 + 5t$$

Cuando $t = 0$:

$$x = 10 \text{ m}$$

La gráfica no pasa por el origen, pues el móvil posee una posición inicial diferente de cero.

La pendiente es:

$$v = 5 \text{ m/s}$$

Por tanto, el modelo contiene dos elementos importantes: una posición inicial y una velocidad constante.

Ejercicio 6. Interpretación de una relación lineal

Situación: la posición de un móvil cambia linealmente con el tiempo.

Datos:

Modelo: $x = 12 + 2t$

Posición x : expresada en metros.

Tiempo t : expresado en segundos.

Actividades:

1. Construye una tabla para $t = 0, 2, 4, 6$ y 8 s.
2. Representa los datos gráficamente.
3. Determina dónde corta la recta al eje vertical.
4. Calcula la pendiente.
5. Determina si la gráfica pasa por el origen.
6. Clasifica la relación como proporcionalidad directa o relación lineal general.

Interpretación: explica el significado físico del punto de corte con el eje vertical y de la pendiente.

1.6.7. Representaciones no lineales

Algunos fenómenos producen gráficas curvas porque la tasa de cambio no permanece constante.

Consideremos:

$$d = 2t^2$$

Los datos son:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
1	2
2	8
3	18
4	32

Los incrementos de distancia no permanecen constantes. Por esta razón, la representación gráfica no es una recta.

Ejercicio 7. Comparación entre una relación lineal y una cuadrática

Situación: se comparan dos modelos matemáticos de distancia en función del tiempo.

Datos:

Modelo A: $d_a = 4t$

Modelo B: $d_b = 2t^2$

Distancia: expresada en metros.

Tiempo: expresado en segundos.

Actividades:

1. Construye una tabla para ambos modelos utilizando $t = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 s.
2. Representa ambas relaciones gráficamente.
3. Identifica cuál produce una recta.
4. Identifica cuál produce una curva.
5. Determina el instante distinto de cero en el que ambos modelos producen la misma distancia.
6. Compara cómo aumenta la distancia en cada modelo.

Interpretación: explica qué información proporciona la curvatura acerca de la forma en que cambia la distancia.

1.6.8. Interpretación de una gráfica

Una gráfica posición-tiempo puede mostrar diferentes comportamientos físicos.

Una pendiente positiva indica que la posición aumenta con el tiempo.

Una pendiente nula indica que la posición permanece constante.

Una pendiente negativa indica que la posición disminuye con el tiempo.

Cuando la pendiente cambia, también cambia la velocidad.

Ejercicio 8. Interpretación física de un movimiento

Situación: un móvil presenta tres etapas diferentes durante su movimiento.

Datos:

Primer intervalo: de 0 s a 4 s, la posición aumenta uniformemente.

Segundo intervalo: de 4 s a 7 s, la posición permanece constante.

Tercer intervalo: de 7 s a 10 s, la posición disminuye uniformemente.

Actividades:

1. Esboza una gráfica posición-tiempo compatible con la descripción.
2. Identifica el tramo con pendiente positiva.
3. Identifica el tramo con pendiente nula.
4. Identifica el tramo con pendiente negativa.
5. Determina en qué intervalo el móvil permanece en reposo.
6. Indica qué datos adicionales serían necesarios para calcular la velocidad en los tramos inclinados.

Interpretación: explica qué significa físicamente cada tipo de pendiente.

1.6.9. Predicciones desde diferentes representaciones

Una predicción puede obtenerse mediante una ecuación, una tabla o una gráfica.

Consideremos:

$$d = 8t$$

Para $t = 20$ s:

$$d = 8(20)$$

$$d = 160 \text{ m}$$

Una tabla puede mostrar el mismo patrón y una gráfica permite estimar visualmente la relación.

Ejercicio 9. Una predicción mediante distintas representaciones

Situación: un móvil parte del origen y mantiene rapidez constante.

Datos:

Rapidez constante: $v = 5 \text{ m/s}$

Posición inicial: $d_0 = 0 \text{ m}$

Actividades:

1. Construye una tabla desde $t = 0$ s hasta $t = 6$ s.
2. Construye la ecuación distancia-tiempo.
3. Representa los datos gráficamente.
4. Calcula mediante la ecuación la distancia en 12 s.
5. Determina cómo podría estimarse el mismo valor utilizando la gráfica.
6. Explica cómo podría obtenerse extendiendo el patrón de la tabla.

Interpretación: compara cuál representación resulta más adecuada para obtener un valor exacto y cuál permite observar mejor la tendencia del movimiento.

1.6.10. Selección de la representación adecuada

Cada forma de representación posee ventajas diferentes.

Una tabla permite organizar y consultar valores específicos.

Una gráfica facilita la identificación de tendencias, cambios y comparaciones.

Una ecuación permite expresar una relación general y realizar cálculos o predicciones.

Una descripción verbal permite comprender el contexto y las condiciones del fenómeno.

Ejercicio 10. Selección de representaciones

Situación: se presentan diferentes necesidades relacionadas con el análisis de fenómenos físicos.

Datos:

- A. Comparar cómo cambia la temperatura de dos líquidos durante 20 min.
- B. Consultar valores exactos registrados durante un experimento.
- C. Calcular la posición de un móvil para distintos valores de tiempo.
- D. Explicar las condiciones bajo las cuales se realizó un experimento.
- E. Identificar rápidamente si una relación es lineal o no lineal.

Actividades:

1. Selecciona para cada caso la representación más adecuada entre descripción verbal, tabla, gráfica o ecuación.
2. Justifica cada selección.
3. Identifica los casos en los que sería conveniente combinar dos o más representaciones.

Interpretación: explica por qué ninguna representación es suficiente para responder por sí sola todas las preguntas relacionadas con un fenómeno físico.

Actividad integradora. Un fenómeno representado de diferentes maneras

Situación: un móvil comienza en una posición diferente del origen y mantiene una velocidad constante durante el intervalo estudiado.

Datos:

Posición inicial: $x_0 = 5 \text{ m}$

Velocidad constante: $v = 3 \text{ m/s}$

Intervalo de estudio: $0 \leq t \leq 8 \text{ s}$

Actividades:

1. Describe verbalmente el movimiento.
2. Construye una tabla de posición y tiempo para el intervalo indicado.
3. Construye la ecuación posición-tiempo.
4. Representa los datos gráficamente.
5. Identifica el punto donde la gráfica corta al eje vertical.
6. Calcula la pendiente de la recta.
7. Utiliza la ecuación para predecir la posición en 15 s, suponiendo que las condiciones del movimiento permanecen constantes.
8. Compara la información proporcionada por la tabla, la ecuación y la gráfica.

Interpretación: explica qué significado físico poseen el punto de corte con el eje vertical y la pendiente. Determina además qué representación utilizarías para comunicar rápidamente el comportamiento general del móvil y justifica tu elección.

Idea fundamental

Las tablas, las ecuaciones, las gráficas y las descripciones verbales constituyen formas complementarias de representar un mismo fenómeno físico.

Las tablas organizan valores concretos; las ecuaciones muestran relaciones generales y facilitan las predicciones; las gráficas permiten reconocer tendencias y cambios; y el lenguaje verbal proporciona el contexto físico necesario para interpretar las demás representaciones.

Comprender un fenómeno físico exige no solo realizar cálculos, sino también ser capaz de relacionar las diferentes representaciones, interpretar su significado y reconocer las condiciones bajo las cuales describen adecuadamente la realidad.

1.7. Interpretación de datos experimentales

Lectura, organización y análisis de información obtenida mediante mediciones

Los experimentos físicos producen información que debe ser organizada e interpretada. Registrar datos no es suficiente para comprender un fenómeno: es necesario analizar cómo varían las magnitudes, identificar patrones, comparar resultados, reconocer posibles errores y establecer conclusiones fundamentadas.

Los **datos experimentales** son valores obtenidos mediante observaciones o mediciones realizadas bajo determinadas condiciones. Cada dato debe estar asociado con una magnitud, una unidad y, cuando corresponda, con el instante o condición en que fue registrado.

Por ejemplo, si se estudia el calentamiento del agua, pueden registrarse la temperatura y el tiempo:

Tiempo t (min)	Temperatura T ($^{\circ}\text{C}$)
0	20
2	28
4	36
6	44
8	52

La tabla no solo muestra valores. También permite reconocer que, durante el intervalo considerado, la temperatura aumenta 8°C cada 2 minutos.

Esto equivale a una tasa media de:

$4^{\circ}\text{C}/\text{min}$

La interpretación transforma así una colección de mediciones en información acerca del comportamiento del fenómeno.

1.7.1. Registro correcto de mediciones

Una medición experimental debe registrarse con claridad. Es necesario incluir:

- la magnitud medida;
- el valor numérico;
- la unidad correspondiente;
- las condiciones relevantes de la medición.

Por ejemplo:

Longitud = 1,25 m

resulta más informativo que escribir únicamente:

1,25

La ausencia de unidades impide interpretar correctamente el valor.

También debe existir coherencia en la forma de registrar las mediciones. Si una distancia se expresa inicialmente en metros, conviene mantener la misma unidad o realizar explícitamente las conversiones necesarias antes de comparar los datos.

Ejemplo explicado

Un estudiante mide la longitud de un objeto varias veces y obtiene:

1,51 m
1,50 m
1,52 m
1,49 m
1,51 m

Aunque los valores no son exactamente iguales, se encuentran muy próximos. Esta variación es habitual en procesos experimentales.

Podemos calcular un valor representativo mediante la media:

$$\text{Media} = (1,51 + 1,50 + 1,52 + 1,49 + 1,51) / 5$$

$$\text{Media} = 1,506 \text{ m}$$

Según la precisión utilizada, podría expresarse aproximadamente como:

1,51 m

Ejercicio 1. Organización de mediciones repetidas

Situación: se mide cinco veces la longitud de una mesa utilizando el mismo instrumento.

Datos:

1,82 m
1,81 m
1,83 m

1,82 m
1,80 m

Actividades:

1. Organiza las mediciones en una tabla.
2. Identifica el valor mayor.
3. Identifica el valor menor.
4. Calcula la media de las cinco mediciones.
5. Determina la diferencia entre el valor máximo y el mínimo.
6. Expresa el valor medio con una unidad adecuada.

Interpretación: explica por qué varias mediciones de una misma magnitud pueden presentar pequeñas diferencias.

1.7.2. Organización de datos en tablas

Las tablas constituyen una herramienta fundamental para ordenar datos experimentales. Permiten comparar valores y observar cómo cambia una magnitud respecto de otra.

Una tabla debe contener encabezados claros y unidades.

Consideremos el movimiento de un carrito:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	0
1	2,1
2	4,0
3	6,2
4	8,1

Los datos sugieren que la posición aumenta aproximadamente 2 m cada segundo.

Sin embargo, los valores no son perfectamente exactos, como ocurriría en un modelo ideal. Esta diferencia entre datos reales y valores teóricos es habitual en la experimentación.

Ejercicio 2. Lectura e interpretación de una tabla experimental

Situación: un móvil se desplaza sobre una pista y se registra su posición cada segundo.

Datos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	0,0
1	1,9
2	4,1
3	6,0
4	8,2
5	10,1

Actividades:

1. Identifica las variables registradas.
2. Determina cuál funciona como variable independiente.
3. Calcula el aumento de posición entre mediciones consecutivas.
4. Determina si los incrementos son exactamente iguales.
5. Estima la variación media de posición por segundo.
6. Propón una expresión matemática sencilla que aproxime el comportamiento observado.

Interpretación: explica por qué los datos experimentales pueden aproximarse a un modelo sin coincidir exactamente con él.

1.7.3. Identificación de patrones

El análisis de datos busca reconocer regularidades. Un patrón puede manifestarse como un aumento constante, una disminución progresiva, una proporcionalidad o una tendencia no lineal.

Consideremos:

Masa m (kg)	Alargamiento x (cm)
0,5	1
1,0	2
1,5	3
2,0	4

La relación entre masa y alargamiento presenta un patrón claro: al duplicarse la masa, se duplica aproximadamente el alargamiento.

Cuando existe una regularidad, podemos intentar representarla matemáticamente.

Ejercicio 3. Reconocimiento de patrones en datos experimentales

Situación: un resorte se somete a diferentes fuerzas y se mide su deformación.

Datos:

Fuerza F (N)	Deformación x (cm)
2	1
4	2
6	3
8	4
10	5

Actividades:

1. Calcula la razón F/x para cada medición.
2. Determina si la razón permanece constante.
3. Identifica el patrón existente.

4. Escribe una expresión matemática sencilla que represente la relación.
5. Utiliza el patrón para predecir la deformación correspondiente a 12 N.

Interpretación: explica qué significado físico podría tener la constante obtenida.

1.7.4. Representación gráfica de datos experimentales

Una gráfica permite visualizar rápidamente tendencias, cambios y posibles anomalías.

Para construirla correctamente es necesario:

- identificar las variables;
- seleccionar los ejes;
- incluir magnitudes y unidades;
- elegir una escala adecuada;
- representar los puntos experimentales.

Los puntos experimentales no siempre forman una línea perfecta. En lugar de unirlos mecánicamente, puede analizarse la tendencia general.

Ejemplo explicado

Consideremos:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0
1	3,1
2	5,9
3	9,2
4	12,0

Los datos se aproximan a:

$$d = 3t$$

Una gráfica mostraría puntos próximos a una recta.

Ejercicio 4. De los datos experimentales a la gráfica

Situación: se registra la distancia recorrida por un carrito.

Datos:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
0	0,0
1	2,2
2	4,1
3	6,3
4	8,0
5	10,2

Actividades:

1. Representa los datos en un plano cartesiano.
2. Rotula correctamente ambos ejes.
3. Describe la tendencia observada.
4. Determina si los puntos parecen ajustarse a una relación lineal.
5. Estima la pendiente de la tendencia.
6. Escribe una ecuación aproximada para representar el fenómeno.

Interpretación: explica qué información proporciona la pendiente obtenida.

1.7.5. Comparación entre valores experimentales y teóricos

Los modelos matemáticos generan valores teóricos o predichos. Los experimentos producen valores medidos. Comparar ambos permite evaluar la utilidad del modelo.

Supongamos que un modelo predice:

$$d = 4t$$

Para $t = 3$ s:

$$d = 12 \text{ m}$$

Si experimentalmente se obtiene:

$$d = 11,7 \text{ m}$$

existe una diferencia de:

$$12,0 \text{ m} - 11,7 \text{ m} = 0,3 \text{ m}$$

La diferencia no implica necesariamente que el modelo sea incorrecto. Puede deberse a factores experimentales o a simplificaciones del modelo.

Ejercicio 5. Comparación entre predicción y medición

Situación: se compara un modelo de movimiento uniforme con datos experimentales.

Datos:

Modelo: $d = 5t$

Tiempo t (s)	Distancia teórica (m)	Distancia experimental (m)
1	5	4,8
2	10	10,2
3	15	14,7
4	20	20,1
5	25	24,6

Actividades:

1. Calcula la diferencia entre los valores teóricos y experimentales.
2. Identifica la mayor diferencia.
3. Identifica la menor diferencia.
4. Determina si la tendencia experimental coincide aproximadamente con el modelo.
5. Calcula la distancia teórica para $t = 6$ s.

Interpretación: evalúa si el modelo representa razonablemente los datos y justifica tu respuesta.

1.7.6. Variabilidad e incertidumbre experimental

Las mediciones poseen siempre algún grado de incertidumbre. Ningún instrumento permite medir con precisión infinita.

La resolución del instrumento, la técnica de medición, las condiciones ambientales y la reacción del observador pueden introducir pequeñas variaciones.

Si un cronómetro digital registra centésimas de segundo, por ejemplo, no sería razonable expresar el tiempo con muchas más cifras decimales de las que el instrumento permite medir.

La interpretación de datos exige reconocer que un resultado experimental es una estimación de la magnitud real.

Ejercicio 6. Análisis de variabilidad experimental

Situación: cinco estudiantes miden el tiempo que tarda una pelota en recorrer una pista.

Datos:

2,14 s
2,18 s
2,12 s
2,16 s
2,15 s

Actividades:

1. Ordena los valores de menor a mayor.
2. Calcula la media.
3. Determina el valor máximo.
4. Determina el valor mínimo.
5. Calcula el rango.
6. Analiza si existe alguna medición claramente alejada del conjunto.

Interpretación: explica por qué resulta conveniente realizar varias mediciones en lugar de utilizar un único valor.

1.7.7. Datos atípicos

En ocasiones, una medición puede diferenciarse considerablemente de las demás. Este valor puede considerarse un **dato atípico**, aunque no debe eliminarse automáticamente.

Primero es necesario investigar su posible origen.

Consideremos:

2,01 s
2,03 s
2,02 s
2,94 s
2,04 s

El valor 2,94 s se encuentra muy alejado del resto. Podría deberse a un error de registro, una demora al utilizar el cronómetro o una modificación real de las condiciones experimentales.

Ejercicio 7. Identificación y evaluación de un dato atípico

Situación: se mide seis veces el período de un movimiento repetitivo.

Datos:

1,48 s
1,50 s
1,49 s
1,51 s
2,10 s
1,49 s

Actividades:

1. Ordena los datos.
2. Identifica el valor que más se diferencia del resto.
3. Calcula la media utilizando todos los valores.
4. Calcula nuevamente la media sin el dato aparentemente atípico.
5. Compara ambos resultados.
6. Propón dos posibles razones para explicar la medición diferente.

Interpretación: explica por qué un dato no debe eliminarse únicamente porque sea diferente.

1.7.8. Elaboración de conclusiones

Una conclusión experimental debe responder la pregunta inicial utilizando evidencias obtenidas durante la investigación.

No basta con afirmar:

“El experimento funcionó”.

Una conclusión científica debe explicar qué muestran los datos.

Por ejemplo:

“Los datos indican que la distancia aumentó aproximadamente 3 m por cada segundo, por lo que el movimiento puede aproximarse mediante un modelo lineal con rapidez cercana a 3 m/s”.

La conclusión conecta los datos con el significado físico del fenómeno.

Ejercicio 8. Construcción de una conclusión basada en datos

Situación: se estudia la relación entre tiempo y temperatura durante un proceso de calentamiento.

Datos:

Tiempo t (min)	Temperatura T ($^{\circ}\text{C}$)
0	20
2	28
4	36
6	44
8	52

Actividades:

1. Describe la tendencia.
2. Calcula el aumento de temperatura en cada intervalo.
3. Determina la tasa media de aumento por minuto.
4. Construye una expresión matemática sencilla.
5. Predice la temperatura para $t = 10$ min, suponiendo que la tendencia continúa.

Interpretación: redacta una conclusión breve utilizando los datos como evidencia.

Actividad integradora. Análisis completo de datos experimentales

Situación: se estudia el movimiento de un carrito sobre una superficie recta.

Datos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	0,0
1	2,1
2	4,0
3	6,2
4	8,1
5	10,3

Actividades:

1. Identifica las variables.
2. Clasifica la variable independiente y la dependiente.
3. Calcula los cambios de posición entre mediciones consecutivas.
4. Estima la velocidad media del carrito.
5. Representa los datos gráficamente.
6. Determina si la tendencia parece lineal.
7. Propón una expresión matemática aproximada.
8. Utiliza el modelo para predecir la posición en 8 s.
9. Explica posibles causas de las pequeñas diferencias entre los datos y el modelo.

Interpretación: redacta una conclusión que describa el comportamiento del carrito y evalúe la utilidad del modelo propuesto.

Idea fundamental

Los datos experimentales adquieren significado cuando se organizan, comparan e interpretan. Una tabla permite ordenar las mediciones; una gráfica facilita la identificación de tendencias; las operaciones matemáticas permiten obtener valores representativos y tasas de cambio; y los modelos ayudan a explicar y predecir el comportamiento del fenómeno.

Interpretar datos implica también reconocer la variabilidad y las limitaciones de las mediciones. El objetivo no consiste únicamente en obtener números, sino en utilizarlos como evidencia para construir conclusiones científicamente fundamentadas.

1.8. Resolución interdisciplinaria de problemas

Problemas contextualizados que integran conceptos físicos y herramientas matemáticas

Resolver un problema interdisciplinario implica utilizar conceptos físicos y herramientas matemáticas de manera integrada. El objetivo no es identificar una fórmula de manera automática, sino comprender la situación, seleccionar la información relevante, establecer relaciones entre las magnitudes y evaluar el significado del resultado.

En una situación real pueden intervenir simultáneamente:

- magnitudes y unidades;
- conversiones;
- proporcionalidad;
- ecuaciones;
- funciones;
- tablas;
- gráficas;
- estimaciones;
- interpretación de resultados.

La resolución interdisciplinaria exige decidir qué herramientas resultan pertinentes en cada caso.

1.8.1. Comprender antes de calcular

Consideremos el siguiente problema:

Un ciclista recorre 18 km en 45 min. ¿Cuál es su rapidez media en m/s?

Antes de calcular debemos identificar:

Distancia: **18 km**

Tiempo: **45 min**

Magnitud buscada: **rapidez media**

Como se solicita el resultado en m/s, primero convertimos las unidades.

$$18 \text{ km} = 18\,000 \text{ m}$$

$$45 \text{ min} = 2\,700 \text{ s}$$

Utilizamos:

$$v = d/t$$

Entonces:

$$v = 18\,000 \text{ m} / 2\,700 \text{ s}$$

$$v \approx 6,67 \text{ m/s}$$

La solución no termina aquí. Debemos interpretar:

El ciclista recorrió, en promedio, aproximadamente 6,67 metros por cada segundo.

Ejercicio 1. Movilidad urbana y rapidez media

Situación: una persona utiliza una bicicleta para desplazarse desde su vivienda hasta su institución educativa.

Datos:

Distancia recorrida: **7,2 km**

Tiempo empleado: **24 min**

Actividades:

1. Convierte la distancia a metros.
2. Convierte el tiempo a segundos.
3. Calcula la rapidez media en m/s.
4. Convierte el resultado a km/h.
5. Determina cuánto tiempo necesitaría para recorrer 12 km si mantuviera la misma rapidez media.

Interpretación: explica por qué expresar una misma rapidez en m/s y km/h produce valores numéricos diferentes sin modificar el movimiento real.

1.8.2. Selección de información relevante

Los problemas contextualizados pueden contener información que no siempre es necesaria para responder todas las preguntas.

Supongamos:

Un automóvil de 1 200 kg recorre 150 km en 2,5 h. El tanque contiene 40 L de combustible. Determina su rapidez media.

Para calcular la rapidez no necesitamos inicialmente la masa ni el volumen de combustible.

Los datos relevantes son:

$$d = 150 \text{ km}$$

$$t = 2,5 \text{ h}$$

Entonces:

$$v = 150 \text{ km} / 2,5 \text{ h}$$

$$v = 60 \text{ km/h}$$

Identificar la información necesaria evita operaciones innecesarias.

Ejercicio 2. Identificación de datos relevantes

Situación: un autobús de 5 000 kg transporta 35 pasajeros y recorre 180 km en 3 h. Su tanque contiene 120 L de combustible.

Datos: todos los valores anteriores forman parte de la descripción.

Actividades:

1. Identifica los datos necesarios para calcular la rapidez media.
2. Identifica los datos que no son necesarios para ese cálculo.
3. Calcula la rapidez media en km/h.
4. Convierte la rapidez a m/s.
5. Explica para qué otro tipo de problema podría resultar útil conocer la masa del autobús.

Interpretación: explica por qué seleccionar la información relevante constituye parte de la resolución científica de problemas.

1.8.3. Uso de proporcionalidad en contextos físicos

La proporcionalidad aparece frecuentemente en problemas cotidianos.

Supongamos que una tubería llena un recipiente a una tasa constante de:

$$4 \text{ L/min}$$

El volumen acumulado después de cierto tiempo puede representarse mediante:

$$V = 4t$$

Después de 15 min:

$$V = 4(15)$$

$$V = 60 \text{ L}$$

La relación permite responder no solo cuánto volumen se acumula, sino también cuánto tiempo se necesita para alcanzar un determinado volumen.

Ejercicio 3. Llenado de un tanque

Situación: un tanque inicialmente vacío recibe agua con un caudal constante.

Datos:

Caudal: **6 L/min**

Capacidad del tanque: **150 L**

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Construye una expresión matemática para representar el volumen.
4. Calcula el volumen después de 8 min.
5. Determina cuánto tiempo se necesita para alcanzar 150 L.
6. Construye una tabla para los primeros 10 min.

Interpretación: explica qué representa físicamente la constante 6 L/min y qué condición debe mantenerse para utilizar el modelo.

1.8.4. Movimiento y relaciones lineales

Un movimiento uniforme puede representarse mediante:

$$x = x_0 + vt$$

La expresión integra un valor inicial, una tasa de cambio y una variable independiente.

Supongamos:

$$x_0 = 20 \text{ m}$$

$$v = 5 \text{ m/s}$$

Después de 6 s:

$$x = 20 + 5(6)$$

$$x = 50 \text{ m}$$

El resultado representa la posición respecto del punto de referencia elegido.

Ejercicio 4. Movimiento de un vehículo de reparto

Situación: un vehículo se encuentra inicialmente a 30 m de un punto de referencia y continúa desplazándose en línea recta con velocidad constante.

Datos:

Posición inicial: $x_0 = 30 \text{ m}$

Velocidad: $v = 8 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Construye la ecuación posición-tiempo.
2. Calcula la posición en 5 s.
3. Calcula la posición en 12 s.
4. Determina el instante en el que alcanza la posición de 150 m.
5. Construye una tabla para $t = 0, 2, 4, 6$ y 8 s .
6. Describe cómo sería la gráfica posición-tiempo.

Interpretación: explica qué representan el punto de corte con el eje vertical y la pendiente de la gráfica.

1.8.5. Fuerza, masa y aceleración

La segunda ley de Newton relaciona tres magnitudes:

$$F = ma$$

Esta expresión muestra que, para una masa constante, la aceleración aumenta proporcionalmente con la fuerza neta aplicada.

Consideremos:

$$m = 4 \text{ kg}$$

$$F = 20 \text{ N}$$

Entonces:

$$a = F/m$$

$$a = 20 \text{ N} / 4 \text{ kg}$$

$$a = 5 \text{ m/s}^2$$

Ejercicio 5. Transporte de una carga

Situación: un carrito de carga es empujado horizontalmente y se considera que la fuerza neta aplicada es constante.

Datos:

Masa: **$m = 25 \text{ kg}$**

Fuerza neta: **$F = 100 \text{ N}$**

Actividades:

1. Calcula la aceleración.
2. Indica la unidad de la aceleración.
3. Determina qué aceleración tendría si la fuerza aumentara a 150 N y la masa permaneciera constante.
4. Calcula qué fuerza sería necesaria para producir una aceleración de 6 m/s^2 .
5. Explica qué tipo de relación existe entre fuerza y aceleración cuando la masa permanece constante.

Interpretación: explica por qué aumentar la masa manteniendo la misma fuerza produciría una aceleración menor.

1.8.6. Presión y área

La presión relaciona fuerza y área:

$$P = F/A$$

Una misma fuerza produce diferente presión dependiendo del área sobre la que actúa.

Supongamos:

$$F = 400 \text{ N}$$

$$A = 0,20 \text{ m}^2$$

Entonces:

$$P = 400 \text{ N} / 0,20 \text{ m}^2$$

$$P = 2\,000 \text{ Pa}$$

Ejercicio 6. Presión en una superficie

Situación: una caja ejerce una fuerza perpendicular sobre el suelo.

Datos:

Fuerza: $F = 600 \text{ N}$

Área de apoyo inicial: $A = 0,30 \text{ m}^2$

Actividades:

1. Calcula la presión inicial.
2. Calcula la presión si el área se reduce a $0,15 \text{ m}^2$.
3. Compara ambos resultados.
4. Determina qué ocurre con la presión cuando el área se reduce a la mitad.
5. Identifica el tipo de proporcionalidad entre presión y área cuando la fuerza permanece constante.

Interpretación: relaciona el resultado con una situación cotidiana en la que reducir el área aumente la presión.

1.8.7. Densidad, masa y volumen

La densidad se define mediante:

$$\rho = m/V$$

Esta relación permite conectar propiedades físicas con herramientas de proporcionalidad y despeje algebraico.

Supongamos que un material posee:

$$\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$$

y un volumen de:

$$V = 20 \text{ cm}^3$$

Entonces:

$$m = \rho V$$

$$m = 2,7 \times 20$$

$$m = 54 \text{ g}$$

Ejercicio 7. Identificación de un material mediante densidad

Situación: se estudia una pieza sólida de material desconocido.

Datos:

Masa: $m = 540 \text{ g}$

Volumen: $V = 200 \text{ cm}^3$

Actividades:

1. Calcula la densidad.
2. Expresa correctamente la unidad.
3. Determina la masa que tendría una pieza del mismo material con volumen de 300 cm^3 .
4. Construye una expresión que relacione masa y volumen.
5. Explica qué cantidad permanece constante si ambas piezas son del mismo material.

Interpretación: explica por qué la densidad puede utilizarse como una propiedad característica para comparar materiales.

1.8.8. Consumo de energía

Los problemas interdisciplinarios también pueden relacionar potencia, energía y tiempo.

La potencia representa la rapidez con la que se transfiere o utiliza energía:

$$P = E/t$$

Por tanto:

$$E = Pt$$

Supongamos un dispositivo de:

$$P = 1\,000 \text{ W}$$

funcionando durante:

$$t = 30 \text{ min} = 1\,800 \text{ s}$$

La energía utilizada es:

$$E = 1\,000 \times 1\,800$$

$$E = 1\,800\,000 \text{ J}$$

Ejercicio 8. Uso de energía en el hogar

Situación: un calentador eléctrico funciona durante cierto tiempo.

Datos:

Potencia: $P = 1\,500 \text{ W}$

Tiempo de funcionamiento: **20 min**

Actividades:

1. Convierte el tiempo a segundos.
2. Calcula la energía utilizada en joules.
3. Determina la energía si funciona durante 40 min.
4. Explica qué relación existe entre energía y tiempo cuando la potencia permanece constante.
5. Calcula cuánto tiempo debería funcionar para utilizar 2 700 000 J.

Interpretación: explica por qué un dispositivo de mayor potencia puede consumir más energía durante el mismo intervalo de funcionamiento.

1.8.9. Comparación de modelos y toma de decisiones

La resolución interdisciplinaria también puede utilizarse para comparar alternativas.

Supongamos dos recorridos:

Ruta A: **12 km en 30 min**

Ruta B: **15 km en 35 min**

Rapidez media de A:

$$v_a = 12 \text{ km} / 0,5 \text{ h} = 24 \text{ km/h}$$

Rapidez media de B:

$$v_b \approx 25,7 \text{ km/h}$$

Aunque la ruta B es más larga, la rapidez media también es mayor.

Resolver el problema implica interpretar simultáneamente distancia, tiempo y rapidez.

Ejercicio 9. Comparación de dos rutas

Situación: una persona analiza dos recorridos posibles para llegar a su lugar de estudio.

Datos:

Ruta A: **9 km en 25 min**

Ruta B: **12 km en 30 min**

Actividades:

1. Convierte ambos tiempos a horas.
2. Calcula la rapidez media en cada ruta.
3. Determina cuál recorrido posee mayor rapidez media.
4. Determina cuál requiere menos tiempo.
5. Calcula la diferencia de distancia entre ambas rutas.
6. Explica por qué la ruta con mayor rapidez media no tiene que ser necesariamente la más conveniente.

Interpretación: identifica qué otros factores reales deberían considerarse antes de elegir una ruta.

1.8.10. Validación del resultado

Después de resolver matemáticamente un problema es necesario comprobar si el resultado tiene sentido físico.

Si calculáramos que un estudiante caminó a:

250 m/s

deberíamos cuestionar inmediatamente la respuesta.

Es posible que exista:

- un error de conversión;
- una unidad incorrecta;
- una operación mal realizada;
- un dato mal interpretado;
- una ecuación inadecuada.

La comprobación de resultados constituye una parte esencial de la resolución.

Ejercicio 10. Detección de resultados incoherentes

Situación: varios estudiantes resolvieron problemas y obtuvieron los siguientes resultados.

Datos:

A. Persona caminando: **1,5 m/s**

B. Automóvil en carretera: **25 m/s**

C. Ciclista: **280 m/s**

D. Aceleración de un objeto: **3 m/s²**

E. Distancia recorrida: **45 m**

Actividades:

1. Identifica los resultados físicamente razonables.
2. Identifica el resultado que debería revisarse con mayor atención.
3. Explica qué tipo de error podría producirlo.
4. Comprueba si todas las unidades corresponden a las magnitudes indicadas.
5. Propón una estrategia para verificar resultados antes de aceptarlos.

Interpretación: explica por qué resolver correctamente las operaciones matemáticas no garantiza por sí solo una solución física correcta.

Actividad integradora. Diseño y análisis de un trayecto cotidiano

Situación: una estudiante se desplaza desde su vivienda hasta una biblioteca utilizando bicicleta. El recorrido se divide en dos tramos.

Datos:

Tramo 1:

Distancia: **3 km**

Tiempo: **12 min**

Tramo 2:

Distancia: **5 km**

Tiempo: **15 min**

Masa total de ciclista y bicicleta: **70 kg**

Actividades:

1. Calcula la distancia total.
2. Calcula el tiempo total.
3. Convierte el tiempo total a segundos.
4. Convierte la distancia total a metros.
5. Calcula la rapidez media de todo el recorrido en m/s.
6. Convierte el resultado a km/h.
7. Calcula la rapidez media de cada tramo por separado.
8. Compara las velocidades medias de ambos tramos.
9. Representa los datos de distancia acumulada y tiempo mediante una tabla.
10. Explica cómo podría representarse aproximadamente el recorrido mediante una gráfica distancia-tiempo.
11. Identifica qué información adicional sería necesaria para estudiar las fuerzas involucradas durante el trayecto.

Interpretación: redacta una conclusión en la que integres los resultados matemáticos con el significado físico del recorrido y expliques por qué una sola magnitud no es suficiente para describir completamente una situación real.

Idea fundamental

La resolución interdisciplinaria de problemas exige integrar conceptos físicos y herramientas matemáticas dentro de un mismo razonamiento. Identificar magnitudes, seleccionar datos, convertir unidades, construir ecuaciones, interpretar tablas y gráficas y evaluar la razonabilidad de los resultados forman parte de un único proceso de comprensión.

Un problema físico no termina cuando se obtiene un número. La solución debe incluir unidades correctas, interpretación física, evaluación de las condiciones del modelo y análisis

de la coherencia del resultado. De esta manera, las Matemáticas dejan de ser únicamente una herramienta de cálculo y se convierten en un medio para comprender y explicar situaciones reales.

CAPÍTULO 2. MOVIMIENTO, FUNCIONES Y REPRESENTACIÓN DEL CAMBIO

2.1. El movimiento como fenómeno medible

Posición, trayectoria, desplazamiento, distancia y tiempo

El movimiento forma parte de numerosos fenómenos cotidianos. Una persona que camina hacia su lugar de estudio, un automóvil que circula por una avenida, una pelota que se desplaza después de ser lanzada o un ascensor que cambia de piso modifican su posición a medida que transcurre el tiempo.

Desde la Física, un cuerpo se encuentra en movimiento cuando su posición cambia respecto de un sistema de referencia durante un intervalo de tiempo. Esta definición muestra que para describir un movimiento no basta con afirmar que un objeto “se mueve”; es necesario establecer desde dónde se observa, dónde se encuentra y cómo cambia su posición.

Las Matemáticas permiten cuantificar esta descripción mediante coordenadas, diferencias entre posiciones, intervalos de tiempo, tablas, gráficas y ecuaciones.

2.1.1. La posición

La **posición** indica dónde se encuentra un objeto respecto de un punto de referencia.

Consideremos una carretera recta en la que se establece un origen en:

$$x = 0 \text{ m}$$

Si un automóvil se encuentra 20 m a la derecha del origen, podemos representar su posición como:

$$x = 20 \text{ m}$$

Si se encuentra 15 m a la izquierda, y se ha definido la derecha como sentido positivo, su posición será:

$$x = -15 \text{ m}$$

El signo no indica que exista una “distancia negativa”. Indica en qué lado del origen se encuentra el objeto.

Ejemplo explicado

Una persona se encuentra inicialmente en:

$$x_1 = 5 \text{ m}$$

y posteriormente se desplaza hasta:

$$x_2 = 17 \text{ m}$$

Las posiciones permiten determinar cómo cambió su ubicación respecto del origen.

Ejercicio 1. Identificación de posiciones respecto de un origen

Situación: en una calle recta se establece una parada de autobús como origen del sistema de referencia. Las posiciones situadas hacia el este se consideran positivas y las situadas hacia el oeste, negativas.

Datos:

Estudiante A: $x = 25 \text{ m}$

Estudiante B: $x = -15 \text{ m}$

Estudiante C: $x = 0 \text{ m}$

Estudiante D: $x = 40 \text{ m}$

Actividades:

1. Identifica qué estudiante se encuentra en el origen.
2. Determina cuáles se encuentran al este.
3. Determina cuál se encuentra al oeste.
4. Ordena las posiciones desde la menor hasta la mayor.
5. Calcula la separación entre los estudiantes A y B.
6. Representa las cuatro posiciones sobre una recta numérica.

Interpretación: explica por qué una posición puede tener signo negativo sin que esto signifique que la distancia física sea negativa.

2.1.2. Posición inicial y posición final

Para estudiar un movimiento es necesario diferenciar la posición inicial de la posición final.

La posición inicial puede representarse mediante:

x_i

y la posición final mediante:

x_f

Supongamos que un móvil comienza en:

$x_i = 4 \text{ m}$

y termina en:

$x_f = 18 \text{ m}$

El cambio de posición puede determinarse comparando ambos valores.

Esta diferencia será fundamental para definir el desplazamiento.

Ejercicio 2. Comparación entre posición inicial y posición final

Situación: un ciclista se desplaza sobre una vía recta.

Datos:

Posición inicial: $x_i = -10 \text{ m}$

Posición final: $x_f = 30 \text{ m}$

Actividades:

1. Ubica ambas posiciones sobre una recta numérica.
2. Determina en qué lado del origen comienza el ciclista.
3. Determina en qué lado termina.
4. Calcula la diferencia entre la posición final y la inicial.
5. Explica qué información adicional aporta conocer ambas posiciones y no solamente la posición final.

Interpretación: describe con palabras el cambio de ubicación experimentado por el ciclista.

2.1.3. Trayectoria

La **trayectoria** es el conjunto de posiciones sucesivas que ocupa un cuerpo durante su movimiento.

Una trayectoria puede ser:

- rectilínea;
- circular;
- parabólica;
- curvilínea;
- irregular.

Un automóvil que circula por una carretera completamente recta puede aproximarse mediante una trayectoria rectilínea. Una piedra lanzada oblicuamente describe aproximadamente una trayectoria parabólica. Un punto situado en el borde de una rueda que gira presenta un movimiento asociado a una trayectoria curva.

La forma de la trayectoria constituye una característica geométrica del movimiento.

Ejemplo explicado

Una persona camina alrededor de una pista circular y finalmente regresa al punto donde comenzó.

Su trayectoria no es una línea recta. Está formada por todos los puntos recorridos alrededor de la pista.

Aunque termine en el punto inicial, ha recorrido una trayectoria completa.

Ejercicio 3. Reconocimiento de trayectorias

Situación: analiza los siguientes movimientos.

Datos:

- A. Un ascensor que sube entre dos pisos.
- B. Una pelota lanzada oblicuamente.
- C. Una persona que corre alrededor de una pista circular.
- D. Un automóvil que recorre una carretera con curvas.
- E. Una piedra que cae verticalmente.

Actividades:

1. Clasifica la trayectoria de cada movimiento.
2. Identifica cuáles pueden aproximarse mediante una trayectoria rectilínea.
3. Identifica el movimiento cuya trayectoria puede aproximarse mediante una parábola.
4. Explica por qué la trayectoria depende del camino seguido y no únicamente de los puntos inicial y final.

Interpretación: relaciona la forma geométrica de una trayectoria con la representación matemática que podría utilizarse para estudiarla.

2.1.4. Distancia recorrida

La **distancia recorrida** indica la longitud total del camino seguido por un cuerpo durante su movimiento.

La distancia es una magnitud escalar. Esto significa que para describirla basta con indicar un valor y una unidad.

Por ejemplo:

$$d = 250 \text{ m}$$

indica que el cuerpo recorrió una longitud total de 250 metros.

La distancia recorrida depende de la trayectoria.

Ejemplo explicado

Una persona camina:

30 m hacia el este

y posteriormente:

10 m hacia el oeste

La distancia total recorrida es:

$$d = 30 \text{ m} + 10 \text{ m}$$

$$d = 40 \text{ m}$$

Para determinar la distancia se suman las longitudes de todos los tramos recorridos, independientemente de su dirección.

Ejercicio 4. Cálculo de distancia recorrida

Situación: una estudiante se desplaza por un pasillo recto. Primero camina 25 m hacia el este, luego 8 m hacia el oeste y finalmente 12 m nuevamente hacia el este.

Datos:

Primer tramo: **25 m**

Segundo tramo: **8 m**

Tercer tramo: **12 m**

Actividades:

1. Calcula la distancia recorrida en el primer tramo.
2. Calcula la distancia acumulada después del segundo tramo.
3. Determina la distancia total del recorrido.
4. Explica por qué para calcular la distancia total no es necesario asignar signos negativos a los tramos.
5. Representa esquemáticamente el recorrido.

Interpretación: explica qué información proporciona la distancia total y qué información no permite conocer por sí sola.

2.1.5. Desplazamiento

El **desplazamiento** representa el cambio de posición de un cuerpo.

En un movimiento rectilíneo puede calcularse mediante:

$$\Delta x = x_f - x_i$$

donde:

- Δx representa el desplazamiento;
- x_f representa la posición final;

- x_i representa la posición inicial.

A diferencia de la distancia, el desplazamiento considera la posición inicial y la final y puede ser positivo, negativo o cero.

Ejemplo explicado

Un móvil comienza en:

$$x_i = 5 \text{ m}$$

y termina en:

$$x_f = 25 \text{ m}$$

Entonces:

$$\Delta x = 25 \text{ m} - 5 \text{ m}$$

$$\Delta x = 20 \text{ m}$$

Si el sentido positivo corresponde a la derecha, el desplazamiento positivo indica que la posición final se encuentra 20 m hacia ese sentido respecto de la posición inicial.

Ejercicio 5. Cálculo e interpretación del desplazamiento

Situación: un estudiante camina sobre una trayectoria recta.

Datos:

Posición inicial: $x_i = 12 \text{ m}$

Posición final: $x_f = -8 \text{ m}$

Actividades:

1. Representa las posiciones sobre una recta.
2. Utiliza la relación $\Delta x = x_f - x_i$.
3. Calcula el desplazamiento.
4. Determina el signo obtenido.
5. Explica qué indica el signo respecto del sentido del cambio de posición.

Interpretación: describe mediante palabras el desplazamiento calculado.

2.1.6. Distancia y desplazamiento no son equivalentes

Aunque en algunos movimientos distancia y magnitud del desplazamiento pueden coincidir, representan conceptos diferentes.

Consideremos una persona que camina 30 m hacia el este y luego 10 m hacia el oeste.

La distancia recorrida es:

$$d = 40 \text{ m}$$

Si comienza en el origen, la posición final será:

$$x_f = 20 \text{ m}$$

Por tanto:

$$\Delta x = 20 \text{ m}$$

La persona recorrió 40 m, pero su cambio neto de posición fue solamente 20 m.

Una diferencia todavía más clara aparece cuando un cuerpo regresa al punto de partida.

Si una persona recorre una pista circular de 400 m y termina exactamente donde comenzó:

$$\text{Distancia recorrida} = 400 \text{ m}$$

pero:

$$\text{Desplazamiento} = 0 \text{ m}$$

Ejercicio 6. Comparación entre distancia y desplazamiento

Situación: una persona comienza en el origen de una calle recta, camina 50 m hacia el este y posteriormente regresa 20 m hacia el oeste.

Datos:

Posición inicial: $x_i = 0 \text{ m}$

Primer tramo: **50 m hacia el este**

Segundo tramo: **20 m hacia el oeste**

Actividades:

1. Calcula la distancia total recorrida.
2. Determina la posición final.
3. Calcula el desplazamiento.
4. Compara numéricamente la distancia y la magnitud del desplazamiento.
5. Explica por qué los dos resultados son diferentes.

Interpretación: indica en qué tipo de movimiento rectilíneo la distancia recorrida puede coincidir con la magnitud del desplazamiento.

2.1.7. El tiempo en la descripción del movimiento

El movimiento implica un cambio de posición durante un intervalo de tiempo.

Si un fenómeno comienza en el instante:

$$t_i$$

y termina en:

$$t_f$$

el intervalo de tiempo se calcula mediante:

$$\Delta t = t_f - t_i$$

Ejemplo explicado

Un automóvil comienza un recorrido cuando:

$$t_i = 5 \text{ s}$$

y finaliza una etapa cuando:

$$t_f = 17 \text{ s}$$

El intervalo transcurrido es:

$$\Delta t = 17 \text{ s} - 5 \text{ s}$$

$$\Delta t = 12 \text{ s}$$

El intervalo de tiempo permite relacionar el cambio espacial del movimiento con su duración.

Ejercicio 7. Determinación de intervalos de tiempo

Situación: durante un experimento se registra el movimiento de una esfera.

Datos:

Inicio del registro: $t_i = 2,5 \text{ s}$

Final del registro: $t_f = 9,8 \text{ s}$

Posición inicial: $x_i = 4 \text{ m}$

Posición final: $x_f = 26 \text{ m}$

Actividades:

1. Calcula el intervalo de tiempo.

2. Calcula el desplazamiento.
3. Determina cuánto cambió la posición por cada segundo, utilizando el cociente entre desplazamiento e intervalo de tiempo.
4. Indica la unidad del resultado.

Interpretación: explica qué información proporciona relacionar un cambio de posición con el tiempo durante el cual ocurre.

Actividad integradora. Análisis completo de un recorrido

Situación: una persona se desplaza sobre una avenida recta. El sentido hacia el este se considera positivo.

Datos:

Posición inicial: $x_i = -10 \text{ m}$

Primer desplazamiento: **35 m hacia el este**

Segundo desplazamiento: **15 m hacia el oeste**

Tiempo total: **20 s**

Actividades:

1. Representa el recorrido sobre una recta numérica.
2. Determina la posición después del primer tramo.
3. Determina la posición final.
4. Calcula la distancia total recorrida.
5. Calcula el desplazamiento total.
6. Compara la distancia con la magnitud del desplazamiento.
7. Calcula el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo total.
8. Calcula el cociente entre el desplazamiento y el tiempo total.

Interpretación: explica por qué los dos cocientes finales proporcionan información diferente acerca del mismo movimiento.

Idea fundamental

Describir un movimiento exige distinguir claramente entre posición, trayectoria, distancia, desplazamiento y tiempo.

La posición indica dónde se encuentra el móvil respecto de una referencia. La trayectoria representa el camino seguido. La distancia mide la longitud total recorrida. El desplazamiento expresa el cambio entre la posición inicial y la final, y el tiempo permite determinar la duración de ese cambio.

Estas magnitudes constituyen la base para construir modelos matemáticos del movimiento.

2.2. Sistemas de referencia y ubicación en el plano

Uso del plano cartesiano para describir posiciones y movimientos

Decir que un objeto está “a cinco metros” no permite establecer completamente dónde se encuentra. Es necesario indicar cinco metros respecto de qué punto y en qué dirección.

Por esta razón, el estudio del movimiento requiere establecer un sistema de referencia.

Un sistema de referencia permite asignar posiciones a los objetos mediante un origen, una orientación y, cuando es necesario, uno o varios ejes coordenados.

Las Matemáticas ofrecen una herramienta especialmente útil para este propósito: el sistema de coordenadas cartesianas.

2.2.1. El origen y los ejes de referencia

En una dimensión podemos utilizar una recta numérica.

El origen corresponde a:

$$x = 0$$

A partir de este punto se define un sentido positivo y uno negativo.

En dos dimensiones se utilizan dos ejes perpendiculares:

- eje horizontal x ;
- eje vertical y .

Ambos se intersectan en el origen:

$$O = (0, 0)$$

Cualquier punto del plano puede representarse mediante un par ordenado:

$$P = (x, y)$$

La primera coordenada indica la posición horizontal y la segunda la posición vertical.

Ejemplo explicado

El punto:

$$A = (4, 3)$$

indica una posición localizada 4 unidades en la dirección positiva del eje x y 3 unidades en la dirección positiva del eje y .

El punto:

$$B = (-2, 5)$$

se encuentra 2 unidades hacia el sentido negativo de x y 5 unidades hacia el sentido positivo de y .

Ejercicio 1. Ubicación de posiciones en el plano cartesiano

Situación: varios objetos se encuentran en diferentes posiciones de un plano.

Datos:

$$A = (3, 4)$$

$$B = (-2, 5)$$

$$C = (-4, -3)$$

$$D = (5, -2)$$

$$E = (0, 3)$$

Actividades:

1. Representa los cinco puntos en un plano cartesiano.
2. Identifica qué punto se encuentra sobre el eje vertical.
3. Determina cuáles poseen coordenada x negativa.
4. Determina cuáles poseen coordenada y negativa.
5. Identifica el cuadrante correspondiente a A, B, C y D.

Interpretación: explica cómo los signos de las coordenadas permiten determinar la región del plano donde se encuentra un objeto.

2.2.2. El movimiento depende del sistema de referencia

El movimiento es relativo al sistema utilizado para observarlo.

Una persona sentada dentro de un autobús se encuentra en reposo respecto del asiento, pero está en movimiento respecto de una persona que permanece en la acera.

Esto no constituye una contradicción. Significa que la descripción del movimiento depende del sistema de referencia.

Ejemplo explicado

Supongamos que un autobús circula a 15 m/s respecto de la carretera.

Una mochila colocada sobre uno de sus asientos tiene:

velocidad = 0 m/s respecto del autobús

pero se desplaza junto con el vehículo respecto de la carretera.

Por ello, antes de describir un movimiento debe indicarse respecto de qué referencia se realiza la observación.

Ejercicio 2. Movimiento y reposo según el observador

Situación: una estudiante permanece sentada dentro de un tren que se desplaza respecto de la estación.

Datos:

Observador A: otro pasajero sentado frente a la estudiante.

Observador B: una persona situada en el andén.

Actividades:

1. Determina si la estudiante está en movimiento respecto del observador A.
2. Determina si está en movimiento respecto del observador B.
3. Explica por qué las respuestas son diferentes.
4. Identifica el sistema de referencia utilizado en cada caso.
5. Indica si puede afirmarse simplemente “la estudiante está en reposo” sin especificar una referencia.

Interpretación: explica por qué el concepto de movimiento requiere establecer siempre un sistema de referencia.

2.2.3. Posición mediante coordenadas

En un movimiento bidimensional la posición puede representarse mediante:

$$\mathbf{P} = (x, y)$$

Supongamos que un robot se encuentra inicialmente en:

$$\mathbf{P}_i = (2 \text{ m}, 1 \text{ m})$$

y posteriormente en:

$$\mathbf{P}_f = (7 \text{ m}, 5 \text{ m})$$

El cambio de posición puede analizarse separando las variaciones de cada coordenada:

$$\Delta x = 7 \text{ m} - 2 \text{ m} = 5 \text{ m}$$

$$\Delta y = 5 \text{ m} - 1 \text{ m} = 4 \text{ m}$$

Estas componentes permiten describir matemáticamente el desplazamiento.

Ejercicio 3. Cambio de posición en dos dimensiones

Situación: un dron se desplaza horizontalmente sobre una zona representada mediante un plano cartesiano.

Datos:

Posición inicial: $P_i = (-2 \text{ m}, 3 \text{ m})$

Posición final: $P_f = (4 \text{ m}, 8 \text{ m})$

Actividades:

1. Representa ambas posiciones en el plano.
2. Calcula el cambio en la coordenada x.
3. Calcula el cambio en la coordenada y.
4. Determina en qué sentidos se produjo cada cambio.
5. Expresa el cambio de posición mediante sus componentes.

Interpretación: explica qué información proporciona analizar el desplazamiento mediante componentes horizontales y verticales.

2.2.4. Distancia entre dos puntos

Cuando un objeto se desplaza directamente entre dos puntos del plano, la distancia en línea recta puede calcularse utilizando el teorema de Pitágoras.

Si los puntos son:

$$A = (x_1, y_1)$$

y:

$$B = (x_2, y_2)$$

las diferencias son:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

La distancia entre ambos puntos es:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Ejemplo explicado

Consideremos:

$$A = (1, 2)$$

$$B = (4, 6)$$

Entonces:

$$\Delta x = 4 - 1 = 3$$

$$\Delta y = 6 - 2 = 4$$

La distancia es:

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5$$

Si las coordenadas se expresan en metros:

$$d = 5 \text{ m}$$

Ejercicio 4. Distancia entre dos posiciones

Situación: un robot se desplaza directamente entre dos puntos de un laboratorio.

Datos:

Posición inicial: **A = (2 m, 1 m)**

Posición final: **B = (8 m, 9 m)**

Actividades:

1. Calcula Δx .
2. Calcula Δy .
3. Construye el triángulo rectángulo asociado al desplazamiento.
4. Utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la distancia en línea recta entre A y B.
5. Expresa el resultado con la unidad correspondiente.

Interpretación: explica por qué el teorema de Pitágoras permite relacionar coordenadas cartesianas con una distancia física.

2.2.5. Trayectorias sobre el plano cartesiano

Una trayectoria puede representarse mediante una sucesión de puntos del plano.

Consideremos las posiciones:

$$A = (0, 0)$$

$$B = (2, 0)$$

$$C = (2, 3)$$

$$D = (5, 3)$$

Si un móvil pasa consecutivamente por A, B, C y D, su trayectoria está formada por tres tramos.

La distancia total recorrida se obtiene sumando sus longitudes:

AB = 2 unidades

BC = 3 unidades

CD = 3 unidades

Por tanto:

Distancia total = 8 unidades

Sin embargo, el desplazamiento depende únicamente de A y D.

Ejercicio 5. Trayectoria, distancia y desplazamiento en el plano

Situación: un móvil sigue una trayectoria formada por varios tramos rectos.

Datos:

$$A = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$$

$$B = (4 \text{ m}, 0 \text{ m})$$

$$C = (4 \text{ m}, 3 \text{ m})$$

$$D = (8 \text{ m}, 3 \text{ m})$$

Actividades:

1. Representa la trayectoria A-B-C-D.
2. Calcula la longitud de cada tramo.
3. Calcula la distancia total recorrida.
4. Calcula el cambio total en la coordenada x.
5. Calcula el cambio total en la coordenada y.
6. Determina la magnitud del desplazamiento entre A y D mediante el teorema de Pitágoras.
7. Compara la distancia total con la magnitud del desplazamiento.

Interpretación: explica por qué la trayectoria completa y el desplazamiento proporcionan información diferente.

2.2.6. Elección del origen

La posición de un objeto depende del origen seleccionado.

Supongamos que un árbol se encuentra a 10 m de una vivienda.

Si la vivienda se toma como origen:

$$x_{\text{árbol}} = 10 \text{ m}$$

Pero si se establece otro origen situado 4 m antes del árbol:

$$x_{\text{árbol}} = 4 \text{ m}$$

El objeto físico no ha cambiado de ubicación. Lo que ha cambiado es la referencia utilizada para asignarle una coordenada.

Ejercicio 6. Cambio del origen de coordenadas

Situación: tres puntos de una carretera se representan inicialmente tomando una estación como origen.

Datos:

$$\text{Casa: } x = -200 \text{ m}$$

$$\text{Estación: } x = 0 \text{ m}$$

$$\text{Parque: } x = 500 \text{ m}$$

Ahora se decide utilizar la casa como nuevo origen.

Actividades:

1. Determina la nueva coordenada de la casa.
2. Determina la nueva coordenada de la estación.
3. Determina la nueva coordenada del parque.
4. Calcula la distancia entre la casa y el parque utilizando ambos sistemas.
5. Compara los resultados.

Interpretación: explica qué cantidades cambian cuando se modifica el origen y qué cantidades físicas permanecen iguales.

Actividad integradora. Movimiento sobre un mapa cartesiano

Situación: un robot se desplaza por una cuadrícula en un laboratorio.

Datos:

$$\text{Inicio: } \mathbf{A} = (-2 \text{ m}, 1 \text{ m})$$

$$\text{Segunda posición: } \mathbf{B} = (3 \text{ m}, 1 \text{ m})$$

$$\text{Tercera posición: } \mathbf{C} = (3 \text{ m}, 5 \text{ m})$$

Final: **D = (7 m, 5 m)**

Tiempo total: **13 s**

Actividades:

1. Representa los cuatro puntos.
2. Dibuja la trayectoria.
3. Calcula la longitud de AB.
4. Calcula la longitud de BC.
5. Calcula la longitud de CD.
6. Calcula la distancia total.
7. Determina Δx entre A y D.
8. Determina Δy entre A y D.
9. Calcula la magnitud del desplazamiento directo entre A y D.
10. Compara distancia y desplazamiento.

Interpretación: explica qué ventajas ofrece el plano cartesiano para estudiar movimientos que ocurren en más de una dirección.

Idea fundamental

Un sistema de referencia permite describir matemáticamente la ubicación y el movimiento. El origen, los ejes y la orientación determinan las coordenadas asignadas a cada posición.

El plano cartesiano permite representar posiciones mediante pares ordenados, analizar desplazamientos mediante componentes y relacionar la geometría con las magnitudes físicas del movimiento.

2.3. Movimiento rectilíneo uniforme y función lineal

Relación entre posición, tiempo, velocidad, pendiente y ecuación de la recta

El **movimiento rectilíneo uniforme (MRU)** constituye uno de los modelos más sencillos para estudiar el movimiento. Se caracteriza porque el móvil sigue una trayectoria recta y mantiene una **velocidad constante**.

Esto significa que realiza desplazamientos iguales durante intervalos de tiempo iguales.

Si un móvil avanza 5 m cada segundo y conserva tanto la magnitud como el sentido de su velocidad, podemos representar su movimiento mediante una función lineal o afín, dependiendo de la posición inicial elegida.

2.3.1. Velocidad constante

La velocidad media en un intervalo puede expresarse como:

$$v = \Delta x / \Delta t$$

En un MRU, la velocidad permanece constante durante todo el intervalo estudiado.

Ejemplo explicado

Un móvil cambia su posición desde:

$$x_i = 10 \text{ m}$$

hasta:

$$x_f = 34 \text{ m}$$

entre:

$$t_i = 2 \text{ s}$$

y:

$$t_f = 8 \text{ s}$$

El desplazamiento es:

$$\Delta x = 34 \text{ m} - 10 \text{ m}$$

$$\Delta x = 24 \text{ m}$$

El intervalo de tiempo es:

$$\Delta t = 8 \text{ s} - 2 \text{ s}$$

$$\Delta t = 6 \text{ s}$$

Por tanto:

$$v = 24 \text{ m} / 6 \text{ s}$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

Ejercicio 1. Cálculo de la velocidad en MRU

Situación: un móvil se desplaza en línea recta manteniendo velocidad constante.

Datos:

Posición inicial: $x_i = -5 \text{ m}$

Posición final: $x_f = 35 \text{ m}$

Instante inicial: $t_i = 2 \text{ s}$

Instante final: $t_f = 12 \text{ s}$

Actividades:

1. Calcula el desplazamiento.
2. Calcula el intervalo de tiempo.
3. Determina la velocidad.
4. Expresa correctamente su unidad.
5. Interpreta el signo de la velocidad.

Interpretación: explica qué significa físicamente el valor obtenido.

2.3.2. Ecuación de posición del MRU

Cuando un móvil posee velocidad constante, su posición puede expresarse mediante:

$$x = x_0 + vt$$

donde:

- x es la posición en un instante determinado;
- x_0 es la posición inicial;
- v es la velocidad constante;
- t es el tiempo transcurrido desde el instante elegido como origen temporal.

Esta expresión posee la misma estructura matemática que una ecuación lineal:

$$y = b + mx$$

La correspondencia es:

- posición (x) $\leftrightarrow$ variable dependiente;
- tiempo (t) $\leftrightarrow$ variable independiente;
- posición inicial (x_0) $\leftrightarrow$ intercepto;
- velocidad (v) $\leftrightarrow$ pendiente.

Ejemplo explicado

Un automóvil comienza en:

$$x_0 = 20 \text{ m}$$

y se desplaza con:

$$v = 6 \text{ m/s}$$

Su ecuación es:

$$x = 20 + 6t$$

Para $t = 5 \text{ s}$:

$$x = 20 + 6(5)$$

$$x = 50 \text{ m}$$

Ejercicio 2. Construcción y uso de la ecuación del MRU

Situación: un ciclista se mueve sobre una vía recta con velocidad constante.

Datos:

Posición inicial: $x_0 = 15 \text{ m}$

Velocidad: $v = 4 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Construye la ecuación posición-tiempo.
2. Calcula la posición en 3 s.
3. Calcula la posición en 8 s.
4. Determina el instante en el que alcanza la posición de 55 m.
5. Construye una tabla para $t = 0, 2, 4, 6$ y 8 s .

Interpretación: explica qué representan físicamente los valores 15 y 4 en la ecuación.

2.3.3. Posición inicial e intercepto

La posición inicial determina dónde comienza la gráfica cuando:

$$t = 0$$

Si:

$$x = 10 + 3t$$

entonces:

$$x_0 = 10 \text{ m}$$

La gráfica posición-tiempo corta el eje vertical en:

$$x = 10 \text{ m}$$

Este punto recibe matemáticamente el nombre de **intercepto vertical**.

Ejercicio 3. Interpretación del intercepto

Situación: se proponen tres movimientos rectilíneos uniformes.

Datos:

Móvil A: $x = 5 + 2t$

Móvil B: $x = -10 + 2t$

Móvil C: $x = 20 + 2t$

Actividades:

1. Identifica la posición inicial de cada móvil.
2. Compara sus velocidades.
3. Determina la posición de cada uno en 5 s.
4. Indica cuál comienza más cerca del origen.
5. Describe cómo serían sus gráficas posición-tiempo.

Interpretación: explica cómo es posible que tres móviles tengan la misma pendiente y diferentes posiciones iniciales.

2.3.4. La pendiente representa la velocidad

En una función lineal o afín:

$$y = b + mx$$

la pendiente indica cuánto cambia (y) cuando cambia (x).

En una gráfica posición-tiempo:

$$\text{pendiente} = \Delta x / \Delta t$$

Por tanto:

$$\text{pendiente} = \text{velocidad}$$

Consideremos dos puntos de una gráfica:

$$A = (2 \text{ s}, 10 \text{ m})$$

$$B = (6 \text{ s}, 30 \text{ m})$$

La pendiente es:

$$m = (30 \text{ m} - 10 \text{ m}) / (6 \text{ s} - 2 \text{ s})$$

$$m = 20 \text{ m} / 4 \text{ s}$$

$$m = 5 \text{ m/s}$$

La velocidad del móvil es 5 m/s.

Ejercicio 4. Velocidad mediante la pendiente

Situación: una recta posición-tiempo pasa por dos puntos experimentales.

Datos:

$$A = (1 \text{ s}, 8 \text{ m})$$

$$B = (5 \text{ s}, 28 \text{ m})$$

Actividades:

1. Calcula el cambio de posición.
2. Calcula el cambio de tiempo.
3. Determina la pendiente.
4. Interpreta la pendiente como velocidad.
5. Utiliza uno de los puntos y la velocidad para determinar la posición inicial.
6. Construye la ecuación posición-tiempo.

Interpretación: explica por qué la pendiente de una gráfica posición-tiempo tiene unidades de m/s.

2.3.5. Velocidad positiva, negativa y nula

El signo de la velocidad contiene información sobre el sentido del movimiento.

Si:

$$v > 0$$

la posición aumenta conforme transcurre el tiempo.

Si:

$$v < 0$$

la posición disminuye.

Si:

$$v = 0$$

la posición permanece constante y el objeto está en reposo respecto del sistema de referencia.

Ejemplo explicado

Para:

$$x = 30 - 5t$$

la velocidad es:

$$v = -5 \text{ m/s}$$

La posición disminuye 5 m por cada segundo.

Ejercicio 5. Interpretación del signo de la velocidad

Situación: tres móviles están representados mediante ecuaciones de posición.

Datos:

A: $x = 10 + 4t$

B: $x = 25 - 3t$

C: $x = 12$

Actividades:

1. Identifica la velocidad de cada móvil.
2. Clasifica cada velocidad como positiva, negativa o nula.
3. Determina la posición inicial de cada móvil.
4. Calcula la posición de cada uno en 5 s.
5. Describe el movimiento correspondiente a cada ecuación.

Interpretación: explica cómo puede identificarse el sentido del movimiento directamente a partir de la ecuación.

2.3.6. Construcción de una ecuación a partir de una tabla

Consideremos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	6
2	14
4	22
6	30

La posición inicial es:

$$x_0 = 6 \text{ m}$$

La posición aumenta:

8 m cada 2 s

Por tanto:

$$v = 4 \text{ m/s}$$

La ecuación es:

$$x = 6 + 4t$$

Ejercicio 6. De una tabla a la función de posición

Situación: se registran las posiciones de un móvil durante un MRU.

Datos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	-5
2	7
4	19
6	31
8	43

Actividades:

1. Determina la posición inicial.
2. Calcula el cambio de posición entre intervalos consecutivos.
3. Calcula la velocidad.
4. Construye la ecuación posición-tiempo.
5. Utiliza la ecuación para calcular la posición en 12 s.
6. Determina cuándo alcanza la posición de 61 m.

Interpretación: explica qué características de la tabla permiten concluir que el movimiento puede modelizarse mediante MRU.

2.3.7. Comparación de movimientos mediante funciones lineales

Dos móviles pueden compararse utilizando sus ecuaciones.

Consideremos:

$$x_A = 5 + 4t$$

$$x_B = 20 + 2t$$

El móvil A comienza detrás del móvil B, pero posee mayor velocidad.

Para determinar cuándo se encuentran, igualamos las posiciones:

$$5 + 4t = 20 + 2t$$

Restamos 2t:

$$5 + 2t = 20$$

Entonces:

$$2t = 15$$

$$t = 7,5 \text{ s}$$

La posición de encuentro es:

$$x = 5 + 4(7,5)$$

$$x = 35 \text{ m}$$

Este procedimiento muestra cómo el álgebra permite predecir un acontecimiento físico.

Ejercicio 7. Encuentro entre dos móviles

Situación: dos personas avanzan por la misma vía recta y en el mismo sentido.

Datos:

Móvil A: $x_A = 0 + 6t$

Móvil B: $x_B = 20 + 4t$

Posición en metros y tiempo en segundos.

Actividades:

1. Identifica la posición inicial de cada móvil.
2. Identifica la velocidad de cada uno.
3. Determina cuál comienza adelante.
4. Iguala las ecuaciones de posición.
5. Calcula el instante en que ambos se encuentran.
6. Determina la posición del encuentro.
7. Comprueba el resultado sustituyendo el tiempo en ambas ecuaciones.

Interpretación: explica por qué el móvil que comienza detrás puede alcanzar al otro.

2.3.8. Interpretación de una gráfica posición-tiempo

Una gráfica de MRU es una recta.

Su **intercepto vertical** representa la posición inicial.

Su **pendiente** representa la velocidad.

Una pendiente positiva corresponde a una recta ascendente.

Una pendiente negativa corresponde a una recta descendente.

Una pendiente nula produce una recta horizontal.

Ejercicio 8. Lectura completa de una gráfica lineal

Situación: una gráfica posición-tiempo corresponde a una recta que pasa por los puntos:

$$A = (0 \text{ s}, 10 \text{ m})$$

$$B = (4 \text{ s}, 26 \text{ m})$$

$$C = (8 \text{ s}, 42 \text{ m})$$

Datos: posición en metros y tiempo en segundos.

Actividades:

1. Determina la posición inicial.
2. Calcula la pendiente utilizando A y B.
3. Comprueba la pendiente utilizando B y C.
4. Determina la velocidad.
5. Construye la ecuación del movimiento.
6. Predice la posición en 12 s.
7. Describe cómo continuaría la gráfica si el movimiento mantuviera las mismas condiciones.

Interpretación: explica por qué obtener la misma pendiente en diferentes tramos constituye evidencia de un movimiento uniforme.

2.3.9. Diferencia entre rapidez y velocidad

En un movimiento rectilíneo sin cambios de sentido, la rapidez y la magnitud de la velocidad pueden coincidir numéricamente.

Sin embargo, conceptualmente no son idénticas.

La rapidez se relaciona con:

distancia recorrida / tiempo

mientras que la velocidad se relaciona con:

desplazamiento / tiempo

La velocidad incluye información acerca del sentido.

Ejemplo explicado

Un móvil recorre 20 m hacia la derecha en 4 s.

Rapidez:

$$20 \text{ m} / 4 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$$

Si la derecha se considera positiva, la velocidad es:

$$v = +5 \text{ m/s}$$

Si recorre los mismos 20 m hacia la izquierda:

Rapidez:

5 m/s

Velocidad:

$v = -5 \text{ m/s}$

Ejercicio 9. Rapidez y velocidad en movimiento rectilíneo

Situación: una persona comienza en el origen, camina 30 m hacia el este y luego 10 m hacia el oeste. El recorrido completo dura 20 s.

Datos:

Distancia hacia el este: **30 m**

Distancia hacia el oeste: **10 m**

Tiempo total: **20 s**

Este: sentido positivo.

Actividades:

1. Calcula la distancia total recorrida.
2. Determina la posición final.
3. Calcula el desplazamiento.
4. Calcula la rapidez media.
5. Calcula la velocidad media.
6. Compara ambos resultados.

Interpretación: explica por qué rapidez media y magnitud de la velocidad media no coinciden en esta situación.

Actividad integradora. Del movimiento a la función lineal

Situación: un móvil se desplaza sobre una vía recta con velocidad constante.

Datos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	-10
2	2
4	14
6	26
8	38

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Determina la posición inicial.
4. Calcula la velocidad utilizando dos pares de datos.
5. Comprueba que la velocidad permanece constante en otro intervalo.
6. Construye la ecuación posición-tiempo.
7. Determina la posición en 15 s.
8. Calcula el instante en el que el móvil cruza el origen.
9. Representa los datos en un plano cartesiano.
10. Identifica gráficamente la posición inicial.
11. Relaciona la pendiente con la velocidad.
12. Explica qué ocurriría con la gráfica si la velocidad cambiara de signo.

Interpretación: explica cómo la posición inicial, la velocidad, la pendiente, la tabla de datos, la ecuación y la gráfica constituyen diferentes formas de describir un mismo movimiento rectilíneo uniforme.

Idea fundamental

El movimiento rectilíneo uniforme conecta directamente Física y Matemáticas. Físicamente, representa un movimiento en línea recta con velocidad constante. Matemáticamente, puede describirse mediante una relación lineal entre posición y tiempo.

La ecuación:

$$x = x_0 + vt$$

contiene dos características esenciales del movimiento: la posición inicial y la velocidad. En la gráfica posición-tiempo, estas mismas cantidades aparecen como el intercepto vertical y la pendiente de la recta.

Comprender el MRU significa, por tanto, ser capaz de interpretar de manera integrada la situación física, los datos, la ecuación y la representación gráfica.

2.4. Movimiento uniformemente acelerado y funciones cuadráticas

Aceleración, variación de velocidad y representación mediante funciones de segundo grado

No todos los movimientos ocurren con velocidad constante. Un automóvil que inicia la marcha, una bicicleta que aumenta progresivamente su rapidez o un vehículo que reduce su velocidad antes de detenerse experimentan cambios en su velocidad.

La magnitud física que permite describir esos cambios es la **aceleración**.

Un movimiento rectilíneo presenta **aceleración constante** cuando la velocidad cambia en la misma cantidad durante intervalos de tiempo iguales. Bajo estas condiciones, el movimiento puede modelizarse mediante relaciones matemáticas en las que aparecen funciones lineales y cuadráticas.

La conexión entre Física y Matemáticas resulta especialmente importante: mientras la velocidad varía linealmente con el tiempo, la posición puede variar de acuerdo con una función de segundo grado.

2.4.1. La aceleración como cambio de velocidad

La aceleración media relaciona el cambio de velocidad con el intervalo de tiempo durante el cual ocurre.

Puede expresarse como:

$$a = \Delta v / \Delta t$$

También:

$$a = (v_f - v_i) / (t_f - t_i)$$

donde:

- **a** representa la aceleración;
- **v_i** representa la velocidad inicial;
- **v_f** representa la velocidad final;
- **Δt** representa el intervalo de tiempo.

En el Sistema Internacional, la aceleración se expresa en:

$$\text{m/s}^2$$

Esta unidad significa que la velocidad cambia una determinada cantidad de metros por segundo durante cada segundo transcurrido.

Ejemplo explicado

Un automóvil aumenta su velocidad desde 4 m/s hasta 16 m/s en 6 s.

Cambio de velocidad:

$$\Delta v = 16 \text{ m/s} - 4 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = 12 \text{ m/s}$$

Aceleración:

$$a = 12 \text{ m/s} \div 6 \text{ s}$$

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

El resultado indica que la velocidad aumenta 2 m/s durante cada segundo.

Ejercicio 1. Cálculo e interpretación de la aceleración

Situación: una motocicleta aumenta uniformemente su velocidad durante un tramo recto.

Datos:

Velocidad inicial: $v_i = 6 \text{ m/s}$

Velocidad final: $v_f = 24 \text{ m/s}$

Intervalo de tiempo: $\Delta t = 9 \text{ s}$

Actividades:

1. Calcula el cambio de velocidad.
2. Calcula la aceleración.
3. Expresa correctamente la unidad del resultado.
4. Determina cuánto aumenta la velocidad durante cada segundo.
5. Calcula qué velocidad tendría después de un segundo adicional si mantuviera la misma aceleración.

Interpretación: explica con tus propias palabras qué significa que la aceleración sea constante.

2.4.2. Velocidad inicial, aceleración y tiempo

Cuando la aceleración permanece constante, la velocidad puede calcularse mediante:

$$v_f = v_i + at$$

Esta relación muestra que la velocidad final depende de tres cantidades: la velocidad inicial, la aceleración y el tiempo durante el cual actúa esa aceleración.

Ejemplo explicado

Un móvil comienza con:

$$v_i = 5 \text{ m/s}$$

y experimenta una aceleración constante de:

$$a = 3 \text{ m/s}^2$$

Después de 4 s:

$$v_f = 5 + 3(4)$$

$$v_f = 17 \text{ m/s}$$

La velocidad aumentó 12 m/s durante los cuatro segundos.

Los valores pueden organizarse así:

Tiempo t (s)	Velocidad v (m/s)
0	5
1	8
2	11
3	14
4	17

La velocidad aumenta 3 m/s cada segundo.

Ejercicio 2. Variación de la velocidad con aceleración constante

Situación: un vehículo se mueve en línea recta con aceleración constante.

Datos:

Velocidad inicial: $v_i = 8 \text{ m/s}$

Aceleración: $a = 2,5 \text{ m/s}^2$

Tiempo de estudio: **5 s**

Actividades:

1. Calcula la velocidad después de 1 s.
2. Calcula la velocidad después de 2 s.
3. Continúa los cálculos hasta 5 s.
4. Organiza los resultados en una tabla tiempo-velocidad.
5. Determina cuánto cambia la velocidad entre valores consecutivos.
6. Describe cómo sería la gráfica velocidad-tiempo.

Interpretación: explica qué representa físicamente la pendiente de una gráfica velocidad-tiempo.

2.4.3. Aceleración positiva y negativa

El signo de la aceleración depende del sistema de referencia y del cambio de la velocidad.

Una aceleración positiva indica que la velocidad cambia hacia el sentido positivo establecido.

Una aceleración negativa indica que la velocidad cambia hacia el sentido negativo.

Por ello, una aceleración negativa no significa automáticamente que el móvil esté disminuyendo su rapidez. Para determinar si acelera o desacelera es necesario analizar conjuntamente los signos de la velocidad y de la aceleración.

Ejemplo explicado

Consideremos un automóvil que se mueve en sentido positivo con:

$$v_i = 20 \text{ m/s}$$

y presenta:

$$a = -4 \text{ m/s}^2$$

Después de 3 s:

$$v_f = 20 - 4(3)$$

$$v_f = 8 \text{ m/s}$$

En este caso, velocidad y aceleración poseen signos opuestos y la rapidez disminuye.

Ejercicio 3. Interpretación del signo de la aceleración

Situación: un automóvil circula en sentido positivo y comienza a reducir su velocidad.

Datos:

Velocidad inicial: $v_i = 25 \text{ m/s}$

Aceleración: $a = -5 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la velocidad después de 1 s.
2. Calcula la velocidad después de 2 s.
3. Calcula la velocidad después de 3 s.
4. Calcula el instante en que la velocidad llega a cero si la aceleración se mantiene.
5. Construye una tabla velocidad-tiempo.
6. Describe la tendencia de los datos.

Interpretación: explica por qué una aceleración negativa puede producir una disminución de la rapidez en esta situación.

2.4.4. Posición en un movimiento con aceleración constante

Cuando la velocidad cambia uniformemente, la posición ya no varía linealmente con el tiempo.

Para un movimiento con aceleración constante puede utilizarse:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

donde:

- x representa la posición;
- x_0 representa la posición inicial;
- v_0 representa la velocidad inicial;

- **a** representa la aceleración;
- **t** representa el tiempo.

La presencia del término t^2 muestra que la posición depende cuadráticamente del tiempo.

Ejemplo explicado

Un móvil comienza en el origen:

$$x_0 = 0 \text{ m}$$

con velocidad inicial:

$$v_0 = 2 \text{ m/s}$$

y aceleración:

$$a = 4 \text{ m/s}^2$$

Después de 3 s:

$$x = 0 + 2(3) + \frac{1}{2}(4)(3^2)$$

$$x = 6 + 18$$

$$x = 24 \text{ m}$$

La posición no aumenta la misma cantidad durante cada segundo, porque la velocidad también está cambiando.

Ejercicio 4. Posición en un movimiento acelerado

Situación: un móvil parte del origen con velocidad inicial distinta de cero y mantiene aceleración constante.

Datos:

Posición inicial: $x_0 = 0 \text{ m}$

Velocidad inicial: $v_0 = 3 \text{ m/s}$

Aceleración: $a = 2 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la posición en 1 s.
2. Calcula la posición en 2 s.
3. Calcula la posición en 3 s.
4. Calcula la posición en 4 s.
5. Organiza los resultados en una tabla.

6. Compara los incrementos de posición entre intervalos consecutivos.
7. Determina si los incrementos permanecen constantes.

Interpretación: explica por qué una aceleración constante produce una relación no lineal entre posición y tiempo.

2.4.5. La función cuadrática en el movimiento

Una función cuadrática posee la forma general:

$$y = ax^2 + bx + c$$

La ecuación de posición del movimiento uniformemente acelerado presenta una estructura equivalente:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

Al compararlas:

- el tiempo desempeña el papel de la variable independiente;
- la posición es la variable dependiente;
- el término cuadrático está asociado con la aceleración;
- el término lineal está asociado con la velocidad inicial;
- el término independiente corresponde a la posición inicial.

Esta relación permite interpretar físicamente una función cuadrática.

Ejemplo explicado

Consideremos:

$$x = 5 + 4t + 2t^2$$

De esta expresión podemos obtener:

Posición inicial:

$$x_0 = 5 \text{ m}$$

Velocidad inicial:

$$v_0 = 4 \text{ m/s}$$

Como:

$$\frac{1}{2}a = 2$$

entonces:

$$a = 4 \text{ m/s}^2$$

La estructura algebraica contiene información física acerca del movimiento.

Ejercicio 5. Interpretación física de una función cuadrática

Situación: un movimiento está representado mediante una función de posición.

Datos:

Modelo: $x = 10 + 6t + 1,5t^2$

Posición expresada en metros.

Tiempo expresado en segundos.

Actividades:

1. Identifica la posición inicial.
2. Identifica la velocidad inicial.
3. Determina el valor de $\frac{1}{2}a$.
4. Calcula la aceleración.
5. Calcula la posición en 2 s.
6. Calcula la posición en 4 s.
7. Describe cómo esperas que sea la gráfica posición-tiempo.

Interpretación: explica qué información física aporta cada término de la función.

2.4.6. Gráficas de posición, velocidad y aceleración

En un movimiento con aceleración constante, las representaciones gráficas de posición, velocidad y aceleración poseen formas diferentes.

La gráfica **posición-tiempo** es una curva asociada con una función cuadrática.

La gráfica **velocidad-tiempo** es una recta cuya pendiente corresponde a la aceleración.

La gráfica **aceleración-tiempo** es una línea horizontal, porque la aceleración permanece constante.

Estas tres representaciones describen diferentes aspectos del mismo movimiento.

Ejercicio 6. Relación entre las gráficas cinemáticas

Situación: un móvil parte del reposo con aceleración constante.

Datos:

Velocidad inicial: $v_0 = 0 \text{ m/s}$

Aceleración: $a = 3 \text{ m/s}^2$

Intervalo de estudio: **0 a 5 s**

Actividades:

1. Construye una tabla tiempo-velocidad.
2. Construye una tabla tiempo-aceleración.
3. Calcula la posición para cada segundo suponiendo $x_0 = 0$ m.
4. Describe la forma de la gráfica velocidad-tiempo.
5. Describe la forma de la gráfica aceleración-tiempo.
6. Describe la forma de la gráfica posición-tiempo.

Interpretación: relaciona las tres gráficas y explica cómo representan simultáneamente un mismo movimiento.

2.4.7. Determinación de la velocidad sin utilizar el tiempo

En algunos problemas no se conoce directamente el tiempo. Para un movimiento con aceleración constante puede utilizarse:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$$

Esta relación conecta velocidad, aceleración y desplazamiento.

Ejemplo explicado

Un automóvil comienza con:

$$v_i = 5 \text{ m/s}$$

acelera a:

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

y recorre:

$$\Delta x = 30 \text{ m}$$

Entonces:

$$v_f^2 = 5^2 + 2(2)(30)$$

$$v_f^2 = 25 + 120$$

$$v_f^2 = 145$$

Por tanto:

$$v_f \approx 12,04 \text{ m/s}$$

Ejercicio 7. Velocidad y desplazamiento en un movimiento acelerado

Situación: un vehículo aumenta uniformemente su velocidad mientras recorre un tramo recto.

Datos:

Velocidad inicial: $v_i = 10 \text{ m/s}$

Aceleración: $a = 3 \text{ m/s}^2$

Desplazamiento: $\Delta x = 40 \text{ m}$

Actividades:

1. Identifica la expresión que permite resolver el problema sin conocer el tiempo.
2. Sustituye los datos.
3. Calcula el cuadrado de la velocidad final.
4. Determina la velocidad final.
5. Comprueba la unidad del resultado.

Interpretación: explica por qué esta relación resulta útil cuando el tiempo no forma parte de los datos disponibles.

Actividad integradora. Del movimiento acelerado a la función cuadrática

Situación: un móvil comienza en una posición diferente del origen y experimenta aceleración constante.

Datos:

Posición inicial: $x_0 = 4 \text{ m}$

Velocidad inicial: $v_0 = 2 \text{ m/s}$

Aceleración: $a = 2 \text{ m/s}^2$

Intervalo de estudio: **0 a 5 s**

Actividades:

1. Construye la ecuación velocidad-tiempo.
2. Construye la ecuación posición-tiempo.
3. Calcula la velocidad para cada segundo.
4. Calcula la posición para cada segundo.
5. Organiza ambos conjuntos de datos en tablas.
6. Describe la gráfica velocidad-tiempo.
7. Describe la gráfica posición-tiempo.
8. Identifica en la función cuadrática el término asociado con la posición inicial.
9. Identifica el término asociado con la velocidad inicial.
10. Identifica el término asociado con la aceleración.

Interpretación: explica por qué la velocidad puede representarse mediante una relación lineal mientras que la posición requiere una función cuadrática.

Idea fundamental

En un movimiento uniformemente acelerado, la velocidad cambia de manera uniforme con el tiempo, mientras que la posición presenta una variación cuadrática.

La aceleración relaciona el cambio de velocidad con el tiempo; la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo representa esa aceleración, y el término cuadrático de la función posición-tiempo refleja matemáticamente el efecto acumulado de la variación de velocidad.

2.5. Caída libre

Modelización matemática del movimiento vertical producido por la gravedad

La caída de un objeto constituye uno de los fenómenos físicos más conocidos. Una fruta que se desprende de un árbol, una pelota que se deja caer o un objeto lanzado verticalmente experimentan un movimiento influido principalmente por la atracción gravitatoria de la Tierra.

Cuando se estudia este movimiento despreciando la resistencia del aire y considerando únicamente la acción de la gravedad, se utiliza el modelo de **caída libre**.

Cerca de la superficie terrestre, la aceleración gravitatoria puede aproximarse mediante:

$$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$$

En ejercicios introductorios también puede utilizarse:

$$g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

si se indica explícitamente que se trata de una aproximación.

La gravedad actúa verticalmente hacia abajo.

2.5.1. La gravedad como aceleración

Un objeto en caída libre no mantiene velocidad constante. Su velocidad cambia debido a la aceleración gravitatoria.

Si elegimos el sentido vertical hacia arriba como positivo, la aceleración es:

$$a = -g$$

Por tanto:

$$a \approx -9,8 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo indica que la aceleración apunta hacia abajo respecto del eje seleccionado.

Ejemplo explicado

Se deja caer una pelota desde el reposo.

Velocidad inicial:

$$v_0 = 0 \text{ m/s}$$

Después de 1 s, aproximadamente:

$$v = -9,8 \text{ m/s}$$

Después de 2 s:

$$v = -19,6 \text{ m/s}$$

Después de 3 s:

$$v = -29,4 \text{ m/s}$$

La velocidad se vuelve cada vez más negativa porque el objeto se mueve hacia abajo y aumenta su rapidez.

Ejercicio 1. Variación de velocidad durante la caída

Situación: una pelota se deja caer desde el reposo y se desprecia la resistencia del aire.

Datos:

Velocidad inicial: $v_0 = 0 \text{ m/s}$

Aceleración: $a = -9,8 \text{ m/s}^2$

Intervalo: **3 s**

Actividades:

1. Calcula la velocidad después de 1 s.
2. Calcula la velocidad después de 2 s.
3. Calcula la velocidad después de 3 s.
4. Organiza los resultados en una tabla.
5. Determina cuánto cambia la velocidad durante cada segundo.

Interpretación: explica qué significa físicamente el signo negativo de las velocidades obtenidas.

2.5.2. Posición durante la caída

La posición vertical puede modelizarse mediante:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

donde:

- y representa la altura o posición vertical;
- y_0 representa la posición inicial;
- v_0 representa la velocidad vertical inicial;
- g representa la magnitud de la aceleración gravitatoria;
- t representa el tiempo.

La presencia del término cuadrático muestra que la posición vertical no cambia uniformemente con el tiempo.

Ejemplo explicado

Una pelota se deja caer desde una altura de 20 m.

Datos:

$$y_0 = 20 \text{ m}$$

$$v_0 = 0 \text{ m/s}$$

Utilizando:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

después de 1 s:

$$y = 20 - 4,9(1^2)$$

$$y = 15,1 \text{ m}$$

La pelota se encuentra a 15,1 m sobre el nivel de referencia.

Ejercicio 2. Altura de un objeto en caída libre

Situación: un objeto se deja caer desde una altura determinada.

Datos:

Altura inicial: $y_0 = 45 \text{ m}$

Velocidad inicial: $v_0 = 0 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Construye la expresión de posición vertical.

2. Calcula la altura después de 1 s.
3. Calcula la altura después de 2 s.
4. Calcula la altura después de 3 s.
5. Organiza los resultados en una tabla.
6. Describe cómo cambia la altura entre intervalos consecutivos.

Interpretación: explica por qué la altura disminuye cada vez más durante intervalos iguales de tiempo.

2.5.3. Tiempo de caída

Cuando un objeto llega al suelo, su posición vertical puede considerarse:

$$y = 0 \text{ m}$$

si el suelo ha sido elegido como nivel de referencia.

Esto permite determinar el tiempo de caída mediante una ecuación cuadrática.

Ejemplo explicado

Una piedra se deja caer desde 19,6 m.

Modelo:

$$y = 19,6 - 4,9t^2$$

Al llegar al suelo:

$$0 = 19,6 - 4,9t^2$$

Entonces:

$$4,9t^2 = 19,6$$

$$t^2 = 4$$

$$t = 2 \text{ s}$$

Se toma la solución positiva porque el tiempo físico transcurrido no es negativo.

Ejercicio 3. Determinación del tiempo de caída

Situación: una pelota se deja caer desde una plataforma.

Datos:

Altura inicial: $y_0 = 44,1 \text{ m}$

Velocidad inicial: $v_0 = 0 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Nivel del suelo: $y = 0 \text{ m}$

Actividades:

1. Construye la ecuación de posición.
2. Sustituye $y = 0 \text{ m}$.
3. Despeja t^2 .
4. Calcula el tiempo de caída.
5. Determina la velocidad inmediatamente antes de alcanzar el suelo.

Interpretación: explica por qué se descarta una eventual solución negativa para el tiempo.

2.5.4. Lanzamiento vertical hacia arriba

La caída libre también incluye objetos lanzados verticalmente hacia arriba. Aunque inicialmente se muevan hacia arriba, la aceleración gravitatoria continúa apuntando hacia abajo.

Mientras el objeto asciende, su velocidad disminuye.

En el punto más alto:

$$v = 0 \text{ m/s}$$

pero la aceleración continúa siendo:

$$a = -g$$

Después, el objeto comienza a descender.

Ejemplo explicado

Una pelota se lanza hacia arriba con:

$$v_0 = 19,6 \text{ m/s}$$

Utilizamos:

$$v = v_0 - gt$$

En el punto más alto:

$$0 = 19,6 - 9,8t$$

Por tanto:

$$t = 2 \text{ s}$$

La pelota tarda 2 s en alcanzar su altura máxima.

Ejercicio 4. Tiempo para alcanzar la altura máxima

Situación: una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba.

Datos:

Velocidad inicial: $v_0 = 24,5 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Escribe la ecuación velocidad-tiempo.
2. Utiliza la condición $v = 0 \text{ m/s}$ en la altura máxima.
3. Calcula el tiempo de ascenso.
4. Determina la velocidad después de 1 s.
5. Determina la velocidad después de 2 s.
6. Explica cómo cambia la velocidad durante el ascenso.

Interpretación: explica por qué la aceleración no se hace cero cuando la pelota alcanza la altura máxima.

2.5.5. Altura máxima

Una vez determinado el tiempo de ascenso, puede calcularse la altura máxima mediante la ecuación de posición.

También puede utilizarse:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y$$

En la altura máxima:

$$v = 0 \text{ m/s}$$

Ejemplo explicado

Una pelota se lanza desde el suelo con:

$$v_0 = 19,6 \text{ m/s}$$

Como:

$$a = -9,8 \text{ m/s}^2$$

tenemos:

$$0 = 19,6^2 - 2(9,8)\Delta y$$

De aquí:

$$\Delta y = 19,6 \text{ m}$$

La altura máxima respecto del punto de lanzamiento es 19,6 m.

Ejercicio 5. Cálculo de altura máxima

Situación: un objeto se lanza verticalmente desde el suelo.

Datos:

Velocidad inicial: $v_0 = 29,4 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Utiliza la condición $v = 0 \text{ m/s}$ en el punto más alto.
2. Selecciona una ecuación que relacione velocidad, aceleración y desplazamiento.
3. Calcula la altura máxima.
4. Calcula el tiempo necesario para alcanzar esa altura.
5. Comprueba si ambos resultados son coherentes entre sí.

Interpretación: explica qué sucede con la energía del movimiento mientras el objeto asciende, sin realizar todavía un análisis energético cuantitativo.

2.5.6. Gráficas de caída libre

Las gráficas permiten comprender diferentes aspectos del movimiento vertical.

En una caída desde el reposo:

- la gráfica posición-tiempo es una curva;
- la gráfica velocidad-tiempo es una recta descendente si arriba es positivo;
- la gráfica aceleración-tiempo es una línea horizontal en $-g$.

La posición presenta una relación cuadrática porque contiene el término t^2 .

Ejercicio 6. Interpretación de gráficas de caída libre

Situación: una pelota se deja caer desde el reposo.

Datos:

Altura inicial: $y_0 = 30 \text{ m}$

Velocidad inicial: $v_0 = 0 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Describe la forma esperada de la gráfica posición-tiempo.
2. Describe la gráfica velocidad-tiempo.
3. Describe la gráfica aceleración-tiempo.
4. Indica cuál de las gráficas es lineal.
5. Indica cuál presenta comportamiento cuadrático.
6. Explica qué representa la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo.

Interpretación: relaciona las tres representaciones con el comportamiento físico de la pelota.

2.5.7. El modelo ideal y la resistencia del aire

El modelo básico de caída libre supone que la resistencia del aire puede despreciarse.

Bajo esa condición, todos los cuerpos experimentan la misma aceleración gravitatoria independientemente de su masa.

En situaciones reales, la forma, el tamaño, la densidad del objeto y la resistencia del aire pueden modificar el movimiento.

Por ello, una hoja de papel y una esfera metálica pueden comportarse de manera muy diferente en el aire, aunque el modelo ideal prediga la misma aceleración gravitatoria cuando la resistencia del medio es despreciable.

Ejercicio 7. Evaluación de los límites del modelo de caída libre

Situación: se dejan caer desde la misma altura una esfera metálica compacta y una hoja de papel extendida.

Datos:

Misma altura inicial.

Ambos cuerpos parten del reposo.

El experimento se realiza en el aire.

Actividades:

1. Identifica la fuerza que el modelo ideal considera fundamental.
2. Indica qué factor adicional puede afectar especialmente a la hoja.
3. Predice cuál podría llegar primero al suelo en condiciones reales.
4. Explica qué ocurriría idealmente si se eliminara la resistencia del aire.
5. Diferencia entre el modelo matemático ideal y la situación experimental.

Interpretación: explica por qué reconocer los supuestos de un modelo resulta indispensable para interpretar correctamente sus predicciones.

Actividad integradora. Modelización completa de un lanzamiento vertical

Situación: una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una plataforma.

Datos:

Altura inicial: $y_0 = 10 \text{ m}$

Velocidad inicial: $v_0 = 19,6 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Construye la ecuación velocidad-tiempo.
2. Construye la ecuación posición-tiempo.
3. Determina el tiempo necesario para alcanzar la altura máxima.
4. Calcula la altura máxima respecto del suelo.
5. Calcula la velocidad en $t = 1 \text{ s}$.
6. Calcula la posición en $t = 1 \text{ s}$.
7. Explica qué ocurre con la velocidad en el punto más alto.
8. Describe la gráfica posición-tiempo.
9. Describe la gráfica velocidad-tiempo.
10. Identifica los supuestos del modelo utilizado.

Interpretación: explica cómo una función cuadrática permite representar matemáticamente la evolución de la posición durante un movimiento vertical sometido a la gravedad.

Idea fundamental

La caída libre es un caso particular de movimiento uniformemente acelerado. La aceleración gravitatoria permanece aproximadamente constante cerca de la superficie terrestre, mientras que la velocidad cambia linealmente y la posición vertical varía de manera cuadrática con el tiempo.

La interpretación correcta del modelo requiere establecer un sistema de referencia, mantener una convención coherente de signos y reconocer que la resistencia del aire se desprecia en el modelo ideal.

2.6. Movimiento parabólico

Componentes horizontal y vertical, trayectoria y función cuadrática

Cuando un objeto es lanzado con una velocidad que posee simultáneamente una componente horizontal y una componente vertical, puede describir una trayectoria curva conocida como **movimiento parabólico** o **movimiento de proyectil**.

Una pelota pateada oblicuamente, un balón lanzado hacia una canasta o un objeto que abandona horizontalmente el borde de una mesa pueden aproximarse mediante este tipo de movimiento cuando la resistencia del aire es pequeña.

La principal estrategia para estudiarlo consiste en analizar el movimiento horizontal y el vertical de manera independiente, aunque ambos ocurran simultáneamente.

En el modelo ideal:

- horizontalmente no existe aceleración;
- verticalmente actúa la aceleración gravitatoria;
- el tiempo es común para ambos movimientos.

La combinación de ambas componentes produce una trayectoria parabólica.

2.6.1. Descomposición de la velocidad inicial

Si un objeto se lanza con velocidad inicial v_0 formando un ángulo θ respecto de la horizontal, la velocidad puede descomponerse en dos componentes.

Componente horizontal:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

Componente vertical:

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

Estas componentes permiten analizar el movimiento utilizando relaciones trigonométricas y ecuaciones cinemáticas.

Ejemplo explicado

Un balón es lanzado con:

$$v_0 = 20 \text{ m/s}$$

y:

$$\theta = 30^\circ$$

Componente horizontal:

$$v_{0x} = 20 \cos 30^\circ$$

$$v_{0x} \approx 17,32 \text{ m/s}$$

Componente vertical:

$$v_{0y} = 20 \sin 30^\circ$$

$$v_{0y} = 10 \text{ m/s}$$

La velocidad inicial ha sido transformada en dos componentes perpendiculares.

Ejercicio 1. Descomposición de una velocidad inicial

Situación: una pelota es lanzada oblicuamente desde el suelo.

Datos:

Velocidad inicial: $v_0 = 24 \text{ m/s}$

Ángulo de lanzamiento: $\theta = 40^\circ$

Actividades:

1. Calcula la componente horizontal de la velocidad inicial.
2. Calcula la componente vertical.
3. Expresa ambas componentes en m/s.
4. Compara sus valores.
5. Determina cuál componente sería mayor si el ángulo disminuyera considerablemente.

Interpretación: explica por qué descomponer la velocidad facilita el análisis matemático del movimiento parabólico.

2.6.2. Movimiento horizontal

En ausencia de resistencia del aire, la aceleración horizontal es:

$$a_x = 0 \text{ m/s}^2$$

Por ello, la componente horizontal de la velocidad permanece constante:

$$v_x = v_{0x}$$

La posición horizontal puede expresarse como:

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

Si el origen horizontal coincide con el punto de lanzamiento:

$$x = v_{0x} t$$

El movimiento horizontal corresponde, por tanto, a un MRU.

Ejemplo explicado

Si:

$$v_{0x} = 12 \text{ m/s}$$

después de 3 s:

$$x = 12(3)$$

$$x = 36 \text{ m}$$

Ejercicio 2. Análisis del movimiento horizontal

Situación: un proyectil posee una componente horizontal constante de velocidad.

Datos:

Posición horizontal inicial: $x_0 = 0 \text{ m}$

Componente horizontal: $v_{0x} = 15 \text{ m/s}$

Intervalo de estudio: **4 s**

Actividades:

1. Calcula la posición horizontal después de 1 s.
2. Calcula la posición horizontal después de 2 s.
3. Continúa hasta 4 s.
4. Organiza los resultados en una tabla.
5. Determina cuánto aumenta x durante cada segundo.
6. Describe la gráfica posición horizontal-tiempo.

Interpretación: explica por qué el movimiento horizontal puede representarse mediante una función lineal.

2.6.3. Movimiento vertical

La componente vertical se comporta como un movimiento uniformemente acelerado bajo la acción de la gravedad.

La velocidad vertical se expresa mediante:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

La posición vertical:

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2}gt^2$$

Por tanto, mientras horizontalmente el movimiento es uniforme, verticalmente es acelerado.

Ejemplo explicado

Un proyectil posee:

$$v_{0y} = 15 \text{ m/s}$$

y parte desde:

$$y_0 = 0 \text{ m}$$

Después de 1 s:

$$v_y = 15 - 9,8(1)$$

$$v_y = 5,2 \text{ m/s}$$

La altura es:

$$y = 15(1) - 4,9(1^2)$$

$$y = 10,1 \text{ m}$$

Ejercicio 3. Análisis de la componente vertical

Situación: una pelota posee una componente vertical inicial de velocidad y se mueve bajo la acción de la gravedad.

Datos:

Altura inicial: $y_0 = 0 \text{ m}$

Componente vertical inicial: $v_{0y} = 19,6 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la velocidad vertical después de 1 s.
2. Calcula la velocidad vertical después de 2 s.
3. Determina qué ocurre con la velocidad vertical en $t = 2 \text{ s}$.
4. Calcula la altura en $t = 1 \text{ s}$.
5. Calcula la altura en $t = 2 \text{ s}$.
6. Describe el comportamiento vertical durante los primeros 2 s.

Interpretación: explica por qué la componente horizontal puede permanecer constante mientras la componente vertical cambia.

2.6.4. La trayectoria parabólica

Las posiciones horizontal y vertical dependen del mismo tiempo.

Horizontalmente:

$$x = v_{0x} t$$

De esta ecuación:

$$t = x/v_{0x}$$

Verticalmente:

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2}gt^2$$

Al sustituir el tiempo por la expresión obtenida a partir del movimiento horizontal, se obtiene una relación entre y y x que contiene un término x^2 .

De manera general, la trayectoria puede escribirse con la estructura:

$$y = y_0 + (\tan \theta)x - [g/(2v_0^2 \cos^2 \theta)]x^2$$

Esta es una función cuadrática respecto de la posición horizontal.

Por ello, la representación gráfica de la trayectoria ideal es una parábola.

Ejemplo explicado

La presencia de un término negativo asociado con x^2 hace que la parábola sea cóncava hacia abajo.

El proyectil asciende, alcanza una altura máxima y posteriormente desciende.

La Física describe el movimiento y las Matemáticas permiten reconocer la trayectoria como una función de segundo grado.

Ejercicio 4. Reconocimiento de la función cuadrática en una trayectoria

Situación: la trayectoria de un proyectil se aproxima mediante:

$$y = 1,2x - 0,05x^2$$

donde x e y se expresan en metros.

Actividades:

1. Identifica el término lineal.
2. Identifica el término cuadrático.
3. Determina el signo del coeficiente de x^2 .
4. Explica qué indica ese signo sobre la orientación de la parábola.
5. Calcula y para $x = 5$ m.
6. Calcula y para $x = 10$ m.
7. Calcula y para $x = 20$ m.

Interpretación: explica por qué una función cuadrática resulta adecuada para representar la trayectoria de un proyectil ideal.

2.6.5. Altura máxima

En el punto más alto de la trayectoria, la componente vertical de la velocidad es cero:

$$v_y = 0 \text{ m/s}$$

La componente horizontal, en cambio, continúa siendo distinta de cero si el proyectil sigue avanzando.

El tiempo para alcanzar la altura máxima puede determinarse mediante:

$$0 = v_{0y} - gt$$

Por tanto:

$$t_{\text{máx}} = v_{0y}/g$$

Ejemplo explicado

Si:

$$v_{0y} = 19,6 \text{ m/s}$$

entonces:

$$t_{\text{máx}} = 19,6 \div 9,8$$

$$t_{\text{máx}} = 2 \text{ s}$$

Durante esos dos segundos, el proyectil también continúa desplazándose horizontalmente.

Ejercicio 5. Altura máxima de un proyectil

Situación: una pelota es lanzada desde el suelo.

Datos:

Componente vertical inicial: $v_{0y} = 24,5 \text{ m/s}$

Componente horizontal inicial: $v_{0x} = 15 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Determina el tiempo necesario para alcanzar la altura máxima.
2. Calcula la altura máxima.
3. Calcula la posición horizontal alcanzada en ese instante.
4. Determina la componente vertical de la velocidad en el punto más alto.
5. Indica la componente horizontal de la velocidad en ese mismo instante.

Interpretación: explica por qué el proyectil continúa moviéndose aunque su velocidad vertical sea cero en la altura máxima.

2.6.6. Tiempo de vuelo

Cuando el proyectil se lanza y aterriza a la misma altura, y se desprecia la resistencia del aire, el movimiento vertical presenta una simetría temporal.

El tiempo de ascenso es igual al tiempo de descenso.

Por tanto:

$$t_{\text{vuelo}} = 2t_{\text{máx}}$$

Si:

$$t_{\text{máx}} = v_{0y}/g$$

entonces:

$$t_{\text{vuelo}} = 2v_{0y}/g$$

Esta relación solo es válida directamente cuando la altura inicial y la final son iguales.

Ejercicio 6. Tiempo total de vuelo

Situación: un proyectil se lanza desde el suelo y vuelve al mismo nivel.

Datos:

Componente vertical inicial: $v_{0y} = 14,7 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el tiempo de ascenso.
2. Calcula el tiempo de descenso.
3. Calcula el tiempo total de vuelo.
4. Determina la velocidad vertical inmediatamente antes de regresar al nivel inicial.
5. Compara esa velocidad con la velocidad vertical inicial.

Interpretación: explica la simetría del movimiento vertical cuando el punto de lanzamiento y el punto de llegada están a la misma altura.

2.6.7. Alcance horizontal

El **alcance horizontal** representa la distancia horizontal total recorrida antes de que el proyectil llegue al nivel final considerado.

Como el movimiento horizontal es uniforme:

$$R = v_{0x} t_{\text{vuelo}}$$

Cuando el proyectil sale y llega a la misma altura, el tiempo total puede calcularse a partir de la componente vertical.

Ejemplo explicado

Si:

$$v_{0x} = 20 \text{ m/s}$$

y:

$$t_{\text{vuelo}} = 3 \text{ s}$$

entonces:

$$R = 20(3)$$

$$R = 60 \text{ m}$$

Ejercicio 7. Cálculo del alcance horizontal

Situación: una pelota es lanzada desde el suelo y regresa al mismo nivel.

Datos:

Componente horizontal: $v_{0x} = 18 \text{ m/s}$

Componente vertical: $v_{0y} = 19,6 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el tiempo de ascenso.
2. Calcula el tiempo total de vuelo.
3. Calcula el alcance horizontal.
4. Calcula la altura máxima.
5. Determina la posición horizontal correspondiente al punto de altura máxima.

Interpretación: explica cómo las componentes horizontal y vertical intervienen conjuntamente en la determinación del alcance.

2.6.8. Lanzamiento horizontal

Un caso particular ocurre cuando un objeto abandona horizontalmente una superficie elevada.

En ese instante:

$$v_{0y} = 0 \text{ m/s}$$

pero:

$$v_{0x} \neq 0 \text{ m/s}$$

Horizontalmente:

$$x = v_{0x} t$$

Verticalmente, si se mide la caída desde el punto de lanzamiento:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2$$

Los dos movimientos comienzan al mismo tiempo.

Ejemplo explicado

Una pelota abandona horizontalmente una mesa con:

$$v_{0x} = 4 \text{ m/s}$$

Si tarda:

$$t = 0,5 \text{ s}$$

en llegar al suelo, su desplazamiento horizontal es:

$$x = 4(0,5)$$

$$x = 2 \text{ m}$$

Ejercicio 8. Lanzamiento horizontal desde una altura

Situación: una pelota abandona horizontalmente una plataforma.

Datos:

Altura: $h = 19,6 \text{ m}$

Velocidad horizontal: $v_{0x} = 8 \text{ m/s}$

Velocidad vertical inicial: $v_{0y} = 0 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el tiempo necesario para llegar al suelo.
2. Calcula el desplazamiento horizontal durante ese tiempo.
3. Calcula la velocidad vertical inmediatamente antes de llegar al suelo.
4. Indica si la velocidad horizontal cambia durante el vuelo ideal.
5. Describe la forma de la trayectoria.

Interpretación: explica por qué un objeto lanzado horizontalmente y otro simplemente soltado desde la misma altura llegan al suelo al mismo tiempo en el modelo ideal.

2.6.9. Influencia del ángulo de lanzamiento

La elección del ángulo modifica las componentes de la velocidad inicial.

Al aumentar el ángulo:

- la componente vertical tiende a aumentar inicialmente;
- la componente horizontal tiende a disminuir;
- la altura máxima puede aumentar;
- el tiempo de vuelo puede aumentar.

Sin embargo, el alcance horizontal depende simultáneamente de ambas componentes.

Para un lanzamiento que comienza y termina a la misma altura, sin resistencia del aire, el alcance puede expresarse como:

$$R = (v_0^2 \sin 2\theta)/g$$

Esto muestra matemáticamente que el alcance depende del ángulo de lanzamiento.

Ejercicio 9. Comparación de ángulos de lanzamiento

Situación: dos proyectiles son lanzados desde el mismo nivel con la misma rapidez inicial.

Datos:

Rapidez inicial de ambos: $v_0 = 20 \text{ m/s}$

Proyectil A: $\theta = 30^\circ$

Proyectil B: $\theta = 60^\circ$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula las componentes horizontales de ambos proyectiles.
2. Calcula las componentes verticales.
3. Compara los tiempos de vuelo.
4. Calcula los alcances horizontales.
5. Compara las alturas máximas.
6. Identifica qué magnitudes son iguales y cuáles son diferentes.

Interpretación: explica por qué dos ángulos diferentes pueden producir el mismo alcance horizontal cuando son complementarios en determinadas condiciones ideales.

2.6.10. El modelo ideal y las trayectorias reales

El modelo parabólico supone:

- gravedad constante;
- ausencia de resistencia del aire;
- objeto tratado como una partícula;
- superficie terrestre aproximadamente plana durante el recorrido;
- ausencia de efectos como viento o rotación del proyectil.

En situaciones reales, estos factores pueden modificar la trayectoria.

Una pelota deportiva, por ejemplo, puede experimentar fuerzas aerodinámicas asociadas con su giro y con el aire. Por ello, una trayectoria experimental puede diferir de la parábola ideal.

Ejercicio 10. Evaluación de un modelo parabólico

Situación: un estudiante utiliza un modelo ideal para predecir el recorrido de una pelota, pero la medición experimental muestra un alcance menor.

Datos:

Alcance predicho: **32 m**

Alcance experimental: **28,5 m**

Actividades:

1. Calcula la diferencia entre ambos alcances.
2. Determina cuánto menor fue el alcance experimental.
3. Identifica dos factores físicos que podrían explicar la diferencia.
4. Explica qué supuesto del modelo podría no cumplirse.
5. Determina si la diferencia implica necesariamente un error matemático.

Interpretación: explica por qué comparar las predicciones con los datos reales es fundamental para evaluar un modelo físico.

Actividad integradora. Modelización de un lanzamiento parabólico

Situación: una pelota es lanzada desde el suelo con una velocidad inicial oblicua y regresa al mismo nivel.

Datos:

Velocidad inicial: **$v_0 = 25 \text{ m/s}$**

Ángulo de lanzamiento: **$\theta = 40^\circ$**

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la componente horizontal de la velocidad inicial.
2. Calcula la componente vertical.
3. Determina el tiempo necesario para alcanzar la altura máxima.
4. Calcula la altura máxima.
5. Determina el tiempo total de vuelo.
6. Calcula el alcance horizontal.
7. Calcula la posición horizontal correspondiente a la altura máxima.
8. Construye una tabla con algunas posiciones horizontales y verticales durante el vuelo.
9. Describe la trayectoria obtenida.
10. Identifica qué parte del movimiento se modeliza mediante una función lineal.
11. Identifica qué parte se modeliza mediante una función cuadrática.
12. Explica los principales supuestos utilizados.

Interpretación: explica cómo la combinación de un movimiento horizontal uniforme y un movimiento vertical uniformemente acelerado produce una trayectoria parabólica y muestra la integración entre geometría, trigonometría, álgebra y Física.

Idea fundamental

El movimiento parabólico puede analizarse separando el movimiento en dos componentes perpendiculares. Horizontalmente, el proyectil mantiene velocidad constante en el modelo ideal; verticalmente, experimenta la aceleración gravitatoria.

La combinación de ambas componentes genera una trayectoria que puede expresarse mediante una función cuadrática. De esta manera, conceptos matemáticos como componentes vectoriales, trigonometría, funciones lineales y parábolas se convierten en herramientas para describir y predecir un fenómeno físico observable.

2.7. Interpretación de gráficas posición-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo

Análisis matemático y físico de diferentes tipos de movimiento

Las gráficas constituyen una de las herramientas más importantes para analizar el movimiento. Una representación gráfica permite observar de manera directa cómo cambia una magnitud respecto del tiempo, identificar períodos de movimiento uniforme, reconocer aceleraciones, detectar instantes de reposo y comparar diferentes etapas de un recorrido.

Interpretar una gráfica física no consiste únicamente en leer puntos. Es necesario comprender qué representa cada eje, analizar la pendiente, reconocer la forma de la curva y relacionar estas características matemáticas con el comportamiento real del móvil.

En cinemática se utilizan especialmente tres representaciones:

- gráfica **posición-tiempo**;

- gráfica **velocidad-tiempo**;
- gráfica **aceleración-tiempo**.

Cada una proporciona información diferente acerca del mismo movimiento.

2.7.1. Lectura de una gráfica posición-tiempo

En una gráfica posición-tiempo, el eje horizontal representa el tiempo y el eje vertical representa la posición.

Un punto de coordenadas:

(4 s, 20 m)

indica que en el instante 4 s el móvil se encuentra en la posición 20 m respecto del origen del sistema de referencia.

Si la gráfica presenta varios puntos, puede analizarse cómo cambia la posición conforme transcurre el tiempo.

Ejemplo explicado

Consideremos los siguientes datos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	5
1	9
2	13
3	17
4	21

La posición aumenta 4 m cada segundo.

La relación puede expresarse mediante:

$$x = 5 + 4t$$

La gráfica correspondiente es una recta ascendente.

Ejercicio 1. Lectura básica de una gráfica posición-tiempo

Situación: el movimiento de un móvil está representado por una gráfica posición-tiempo construida a partir de los siguientes datos.

Datos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	10
2	18
4	26

6	34
8	42

Actividades:

1. Determina la posición inicial.
2. Determina la posición en 4 s.
3. Calcula el cambio de posición entre 2 s y 6 s.
4. Calcula el intervalo de tiempo correspondiente.
5. Determina cuánto cambia la posición por segundo.
6. Construye la expresión matemática que representa el movimiento.

Interpretación: explica qué características de los datos permiten afirmar que la gráfica posición-tiempo corresponde a una recta.

2.7.2. Pendiente de la gráfica posición-tiempo

La pendiente de una gráfica posición-tiempo representa la velocidad.

Puede calcularse mediante:

$$v = \Delta x / \Delta t$$

Una pendiente positiva indica que la posición aumenta.

Una pendiente negativa indica que la posición disminuye.

Una pendiente nula indica que la posición permanece constante.

Ejemplo explicado

Un móvil pasa por:

$$A = (2 \text{ s}, 8 \text{ m})$$

y:

$$B = (6 \text{ s}, 28 \text{ m})$$

El cambio de posición es:

$$\Delta x = 28 \text{ m} - 8 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

El intervalo es:

$$\Delta t = 6 \text{ s} - 2 \text{ s} = 4 \text{ s}$$

Por tanto:

$$v = 20 \text{ m} \div 4 \text{ s}$$

$$v = 5 \text{ m/s}$$

Ejercicio 2. Interpretación de la pendiente

Situación: una gráfica posición-tiempo contiene dos puntos pertenecientes al mismo tramo rectilíneo.

Datos:

Punto A: (1 s, 7 m)

Punto B: (5 s, 27 m)

Actividades:

1. Calcula el cambio de posición.
2. Calcula el intervalo de tiempo.
3. Determina la pendiente.
4. Expresa la pendiente en m/s.
5. Identifica el significado físico del resultado.
6. Determina si la posición aumenta o disminuye con el tiempo.

Interpretación: explica por qué una mayor inclinación de una recta posición-tiempo corresponde a una mayor magnitud de velocidad.

2.7.3. Reposo en una gráfica posición-tiempo

Un móvil se encuentra en reposo respecto del sistema de referencia cuando su posición no cambia con el tiempo.

En una gráfica posición-tiempo esto se representa mediante un tramo horizontal.

Por ejemplo:

Tiempo t (s) Posición x (m)

3 20

4 20

5 20

6 20

Durante ese intervalo:

$$\Delta x = 0 \text{ m}$$

Por tanto:

$$v = 0 \text{ m/s}$$

Ejercicio 3. Identificación de intervalos de reposo

Situación: un móvil presenta tres etapas.

Datos:

De 0 s a 4 s: la posición aumenta desde 0 m hasta 16 m.

De 4 s a 7 s: la posición permanece en 16 m.

De 7 s a 10 s: la posición disminuye desde 16 m hasta 4 m.

Actividades:

1. Esboza una gráfica posición-tiempo.
2. Identifica el intervalo de movimiento en sentido positivo.
3. Identifica el intervalo de reposo.
4. Identifica el intervalo de movimiento en sentido negativo.
5. Calcula la velocidad media en el primer tramo.
6. Calcula la velocidad media en el tercer tramo.

Interpretación: explica qué significado físico poseen un tramo horizontal y un tramo descendente en una gráfica posición-tiempo.

2.7.4. Curvatura en una gráfica posición-tiempo

Si la gráfica posición-tiempo es curva, la velocidad no permanece constante.

Consideremos un movimiento descrito aproximadamente por:

$$x = 2t^2$$

Los valores son:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	0
1	2
2	8
3	18
4	32

Los incrementos de posición son cada vez mayores.

La pendiente de la gráfica cambia con el tiempo, lo que indica que la velocidad también cambia.

Ejercicio 4. Interpretación de una gráfica posición-tiempo curva

Situación: un móvil presenta el siguiente modelo de posición.

Datos:

Modelo: $x = 3t^2$

Posición expresada en metros.

Tiempo expresado en segundos.

Actividades:

1. Calcula la posición para $t = 0, 1, 2, 3$ y 4 s.
2. Organiza los resultados en una tabla.
3. Calcula los cambios de posición entre intervalos consecutivos de 1 s.
4. Compara dichos cambios.
5. Determina si la velocidad puede considerarse constante.
6. Describe la forma esperada de la gráfica posición-tiempo.

Interpretación: explica por qué una gráfica curva permite reconocer que el movimiento no es uniforme.

2.7.5. Lectura de una gráfica velocidad-tiempo

En una gráfica velocidad-tiempo, el eje horizontal representa el tiempo y el eje vertical representa la velocidad.

Si la gráfica es una línea horizontal, la velocidad permanece constante.

Por ejemplo:

$$v = 6 \text{ m/s}$$

durante 5 s corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme.

Si la gráfica es una recta inclinada, la velocidad cambia uniformemente y existe aceleración constante.

Ejemplo explicado

Consideremos:

Tiempo t (s)	Velocidad v (m/s)
0	2
1	5
2	8
3	11
4	14

La velocidad aumenta 3 m/s durante cada segundo.

La aceleración es:

$$a = 3 \text{ m/s}^2$$

Ejercicio 5. Lectura de una gráfica velocidad-tiempo

Situación: la velocidad de un vehículo cambia uniformemente.

Datos:

Tiempo t (s)	Velocidad v (m/s)
0	4
2	10
4	16
6	22
8	28

Actividades:

1. Determina la velocidad inicial.
2. Calcula el cambio de velocidad entre 0 s y 8 s.
3. Calcula la aceleración.
4. Determina cuánto aumenta la velocidad cada segundo.
5. Construye la ecuación velocidad-tiempo.
6. Describe la forma de la gráfica.

Interpretación: explica qué representa físicamente la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo.

2.7.6. Pendiente de la gráfica velocidad-tiempo

La pendiente de una gráfica velocidad-tiempo representa la aceleración.

Puede calcularse mediante:

$$a = \Delta v / \Delta t$$

Si la pendiente es positiva, la velocidad aumenta hacia el sentido positivo.

Si es negativa, la velocidad cambia hacia el sentido negativo.

Si la pendiente es cero, la velocidad permanece constante.

Ejemplo explicado

Un automóvil disminuye su velocidad desde:

$$20 \text{ m/s}$$

hasta:

8 m/s

en:

4 s

Cambio de velocidad:

$$\Delta v = 8 - 20$$

$$\Delta v = -12 \text{ m/s}$$

Aceleración:

$$a = -12 \text{ m/s} \div 4 \text{ s}$$

$$a = -3 \text{ m/s}^2$$

Ejercicio 6. Cálculo de aceleración mediante una gráfica velocidad-tiempo

Situación: un vehículo reduce uniformemente su velocidad.

Datos:

Velocidad inicial: $v_i = 30 \text{ m/s}$

Velocidad final: $v_f = 10 \text{ m/s}$

Intervalo de tiempo: 5 s

Actividades:

1. Calcula el cambio de velocidad.
2. Determina la aceleración.
3. Indica el signo obtenido.
4. Explica qué representa ese signo.
5. Calcula el tiempo adicional necesario para alcanzar $v = 0 \text{ m/s}$ si mantiene la misma aceleración.
6. Describe cómo continuaría la gráfica.

Interpretación: explica la relación entre la pendiente negativa de la gráfica y la variación de la velocidad.

2.7.7. Área bajo una gráfica velocidad-tiempo

La gráfica velocidad-tiempo contiene otra información importante: el área comprendida entre la gráfica y el eje temporal representa el **desplazamiento**.

Para una velocidad constante, el área forma un rectángulo.

Si:

$$v = 5 \text{ m/s}$$

durante:

$$t = 4 \text{ s}$$

el área es:

$$\text{Área} = 5 \text{ m/s} \times 4 \text{ s}$$

$$\text{Área} = 20 \text{ m}$$

Este valor corresponde al desplazamiento.

Ejemplo explicado

Si un móvil comienza desde el reposo y aumenta uniformemente su velocidad hasta 10 m/s en 4 s, la región bajo la gráfica forma un triángulo.

El área es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times 4 \text{ s} \times 10 \text{ m/s}$$

$$\text{Área} = 20 \text{ m}$$

Ejercicio 7. Desplazamiento mediante el área bajo la gráfica

Situación: un móvil mantiene velocidad constante durante un primer tramo y posteriormente se detiene.

Datos:

De 0 s a 6 s: $v = 8 \text{ m/s}$

De 6 s a 9 s: $v = 0 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Esboza la gráfica velocidad-tiempo.
2. Identifica la figura geométrica formada durante el primer tramo.
3. Calcula el área bajo la gráfica entre 0 s y 6 s.
4. Determina el desplazamiento durante el segundo tramo.
5. Calcula el desplazamiento total.

Interpretación: explica por qué el producto entre velocidad y tiempo produce una magnitud expresada en metros.

2.7.8. Velocidades negativas en una gráfica

Una gráfica velocidad-tiempo puede contener valores negativos.

Una velocidad negativa indica movimiento en el sentido negativo del eje de referencia. No representa una rapidez negativa.

Si un móvil presenta:

$$v = -4 \text{ m/s}$$

significa que cambia su posición 4 m por segundo en el sentido definido como negativo.

El área situada por debajo del eje temporal representa un desplazamiento negativo.

Ejercicio 8. Interpretación de velocidades positivas y negativas

Situación: un móvil presenta dos etapas de velocidad constante.

Datos:

De 0 s a 5 s: $v = 6 \text{ m/s}$

De 5 s a 9 s: $v = -3 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Esboza la gráfica velocidad-tiempo.
2. Calcula el desplazamiento durante el primer tramo.
3. Calcula el desplazamiento durante el segundo tramo.
4. Calcula el desplazamiento total.
5. Calcula la distancia total recorrida.
6. Compara distancia y desplazamiento.

Interpretación: explica por qué el área situada por debajo del eje temporal debe considerarse con signo negativo al calcular el desplazamiento.

2.7.9. Gráfica aceleración-tiempo

En una gráfica aceleración-tiempo, el eje horizontal representa el tiempo y el vertical representa la aceleración.

Si la aceleración permanece constante, la gráfica es una línea horizontal.

Por ejemplo:

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

significa que la velocidad cambia 2 m/s cada segundo.

Si:

$$a = 0 \text{ m/s}^2$$

la velocidad permanece constante.

Ejemplo explicado

Un móvil comienza con:

$$v_0 = 5 \text{ m/s}$$

y mantiene:

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

durante 4 s.

Las velocidades son:

Tiempo t (s)	Velocidad v (m/s)
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13

Una aceleración horizontal constante en la gráfica a-t produce una variación lineal de la velocidad.

Ejercicio 9. De la aceleración a la velocidad

Situación: un móvil mantiene aceleración constante durante un intervalo.

Datos:

Velocidad inicial: $v_0 = 4 \text{ m/s}$

Aceleración: $a = 3 \text{ m/s}^2$

Tiempo: 5 s

Actividades:

1. Esboza la gráfica aceleración-tiempo.
2. Calcula la velocidad después de cada segundo.
3. Organiza los resultados en una tabla.
4. Describe la gráfica velocidad-tiempo correspondiente.
5. Calcula la velocidad final.
6. Determina cuánto cambió la velocidad durante los 5 s.

Interpretación: explica cómo una aceleración constante produce una gráfica velocidad-tiempo lineal.

2.7.10. Relación entre las tres gráficas

Las gráficas posición-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo no representan fenómenos independientes. Son diferentes formas de describir un mismo movimiento.

Para un MRU:

- la gráfica posición-tiempo es una recta;
- la gráfica velocidad-tiempo es horizontal;
- la gráfica aceleración-tiempo coincide con $a = 0$.

Para un movimiento con aceleración constante distinta de cero:

- la gráfica posición-tiempo es una curva cuadrática;
- la gráfica velocidad-tiempo es una recta;
- la gráfica aceleración-tiempo es horizontal.

La forma de una gráfica permite anticipar características de las otras.

Ejercicio 10. Relación entre posición, velocidad y aceleración

Situación: un móvil parte del reposo con aceleración constante.

Datos:

Posición inicial: $x_0 = 0 \text{ m}$

Velocidad inicial: $v_0 = 0 \text{ m/s}$

Aceleración: $a = 2 \text{ m/s}^2$

Intervalo: **0 a 5 s**

Actividades:

1. Construye una tabla aceleración-tiempo.
2. Construye una tabla velocidad-tiempo.
3. Construye una tabla posición-tiempo.
4. Describe la forma de cada gráfica.
5. Identifica cuál es horizontal.
6. Identifica cuál es lineal.
7. Identifica cuál es cuadrática.
8. Relaciona la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo con la aceleración.

Interpretación: explica cómo las tres gráficas permiten construir una descripción más completa del movimiento que cualquiera de ellas por separado.

Actividad integradora. Interpretación de un movimiento por etapas

Situación: un automóvil realiza un recorrido rectilíneo compuesto por tres etapas.

Datos:

Etapla 1: parte del reposo y alcanza 12 m/s uniformemente en 4 s.

Etapla 2: mantiene 12 m/s durante 6 s.

Etapla 3: reduce uniformemente su velocidad hasta detenerse en 3 s.

Actividades:

1. Construye una tabla con los instantes principales y las velocidades correspondientes.
2. Esboza la gráfica velocidad-tiempo completa.
3. Calcula la aceleración durante la primera etapa.
4. Determina la aceleración durante la segunda etapa.
5. Calcula la aceleración durante la tercera etapa.
6. Calcula el desplazamiento de la primera etapa mediante el área bajo la gráfica.
7. Calcula el desplazamiento de la segunda etapa.
8. Calcula el desplazamiento de la tercera etapa.
9. Determina el desplazamiento total.
10. Describe cualitativamente la gráfica posición-tiempo correspondiente.
11. Esboza la gráfica aceleración-tiempo.

Interpretación: explica cómo las pendientes, áreas y formas de las tres gráficas permiten reconstruir matemáticamente todo el recorrido.

Idea fundamental

Interpretar gráficas cinemáticas exige relacionar características matemáticas con significados físicos.

En una gráfica posición-tiempo, la pendiente representa la velocidad. En una gráfica velocidad-tiempo, la pendiente representa la aceleración y el área representa el desplazamiento. En una gráfica aceleración-tiempo, los valores permiten conocer cómo cambia la velocidad.

Una lectura correcta no consiste únicamente en observar si una línea sube o baja. Es necesario interpretar qué magnitud aparece en cada eje, qué representa la pendiente y qué significado físico posee cada tramo.

2.8. Problemas integradores del movimiento

Aplicaciones relacionadas con transporte, deportes, seguridad vial y situaciones cotidianas

Los modelos cinemáticos permiten analizar situaciones que forman parte de la vida cotidiana. El tiempo necesario para completar un recorrido, la distancia de frenado de un vehículo, el movimiento de un deportista o la trayectoria de una pelota pueden estudiarse mediante magnitudes, ecuaciones, funciones y gráficas.

Los problemas integradores requieren seleccionar el modelo apropiado. No todas las situaciones corresponden a un movimiento uniforme, ni todos los datos disponibles son necesariamente relevantes.

Resolver correctamente exige identificar las condiciones físicas antes de realizar cálculos.

2.8.1. Transporte y rapidez media

La rapidez media permite relacionar distancia total recorrida y tiempo total empleado.

Se calcula mediante:

$$\text{rapidez media} = \text{distancia total} / \text{tiempo total}$$

Ejemplo explicado

Un autobús recorre 150 km en 2,5 h.

Rapidez media:

$$150 \text{ km} \div 2,5 \text{ h} = 60 \text{ km/h}$$

Esto no significa necesariamente que el autobús haya circulado siempre a 60 km/h. El resultado representa una razón promedio para el recorrido completo.

Ejercicio 1. Análisis de un recorrido interurbano

Situación: un autobús realiza un trayecto entre dos ciudades.

Datos:

Distancia total: **180 km**

Tiempo de conducción: **2 h 30 min**

Parada intermedia: **15 min**

Actividades:

1. Convierte todos los tiempos a horas.
2. Calcula el tiempo total del viaje incluyendo la parada.
3. Calcula la rapidez media considerando solamente el tiempo de conducción.
4. Calcula la rapidez media considerando todo el tiempo del viaje.
5. Compara ambos resultados.
6. Convierte ambas rapidezces a m/s.

Interpretación: explica por qué la rapidez media depende del intervalo temporal que se utilice en el cálculo.

2.8.2. Tiempo de reacción y seguridad vial

Cuando un conductor detecta un peligro no comienza a frenar instantáneamente. Transcurre un **tiempo de reacción** durante el cual el vehículo continúa desplazándose.

Si durante ese intervalo la velocidad se mantiene aproximadamente constante:

$$d_r = vt_r$$

donde:

- d_r representa la distancia de reacción;
- v representa la velocidad;
- t_r representa el tiempo de reacción.

Ejemplo explicado

Un vehículo circula a:

$$20 \text{ m/s}$$

y el conductor tarda:

$$0,8 \text{ s}$$

en reaccionar.

Distancia de reacción:

$$d_r = 20 \times 0,8$$

$$d_r = 16 \text{ m}$$

Antes de comenzar a frenar, el automóvil ya ha recorrido 16 m.

Ejercicio 2. Distancia recorrida durante el tiempo de reacción

Situación: un automóvil circula por una carretera cuando el conductor observa un obstáculo.

Datos:

Velocidad inicial: $v = 25 \text{ m/s}$

Tiempo de reacción: $t_r = 0,7 \text{ s}$

Actividades:

1. Calcula la distancia de reacción.
2. Convierte 25 m/s a km/h.
3. Calcula la distancia de reacción si el tiempo aumenta a 1,2 s.
4. Compara ambas distancias.

5. Determina cuánto aumenta la distancia recorrida debido al mayor tiempo de reacción.

Interpretación: explica por qué pequeñas variaciones en el tiempo de reacción pueden ser importantes para la seguridad vial.

2.8.3. Frenado con aceleración constante

Durante un frenado puede utilizarse un modelo de aceleración constante negativa como aproximación.

Consideremos:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$$

Si el automóvil se detiene:

$$v_f = 0 \text{ m/s}$$

La ecuación permite calcular la distancia de frenado.

Ejemplo explicado

Un automóvil circula a:

$$v_i = 20 \text{ m/s}$$

y frena con:

$$a = -5 \text{ m/s}^2$$

Entonces:

$$0 = 20^2 + 2(-5)\Delta x$$

$$0 = 400 - 10\Delta x$$

$$\Delta x = 40 \text{ m}$$

Ejercicio 3. Distancia de frenado

Situación: un vehículo comienza a frenar de manera uniforme hasta detenerse.

Datos:

Velocidad inicial: $v_i = 24 \text{ m/s}$

Velocidad final: $v_f = 0 \text{ m/s}$

Aceleración: $a = -6 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la distancia de frenado.
2. Calcula el tiempo necesario para detenerse.
3. Comprueba el resultado utilizando la ecuación velocidad-tiempo.
4. Describe la gráfica velocidad-tiempo.
5. Calcula el área bajo esa gráfica y compárala con la distancia de frenado.

Interpretación: explica cómo dos procedimientos matemáticos diferentes pueden conducir al mismo desplazamiento físico.

2.8.4. Distancia total de detención

La distancia necesaria para detener un vehículo incluye dos etapas:

1. distancia recorrida durante la reacción;
2. distancia recorrida durante el frenado.

Por tanto:

distancia de detención = distancia de reacción + distancia de frenado

Ejemplo explicado

Si:

$$d_r = 15 \text{ m}$$

y:

$$d_f = 35 \text{ m}$$

entonces:

$$d_{\text{total}} = 50 \text{ m}$$

Ejercicio 4. Seguridad vial y distancia de detención

Situación: un automóvil se aproxima a un obstáculo.

Datos:

Velocidad inicial: $v_i = 20 \text{ m/s}$

Tiempo de reacción: **0,75 s**

Aceleración durante el frenado: $a = -5 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la distancia recorrida durante la reacción.
2. Calcula la distancia de frenado.
3. Calcula la distancia total de detención.
4. Calcula el tiempo de frenado.
5. Calcula el tiempo total desde la detección del obstáculo hasta que el automóvil se detiene.
6. Determina si podría detenerse antes de un obstáculo situado a 50 m.

Interpretación: explica por qué la distancia de detención no puede calcularse considerando únicamente el frenado.

2.8.5. Movimiento de un corredor

En los deportes, el movimiento puede dividirse en diferentes etapas. Un corredor puede acelerar al inicio, alcanzar una rapidez alta y mantenerla durante parte de la competencia.

Ejemplo explicado

Un corredor parte del reposo y alcanza 8 m/s en 4 s con aceleración uniforme.

Aceleración:

$$a = 8 \text{ m/s} \div 4 \text{ s}$$

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

El desplazamiento durante ese intervalo es:

$$d = \frac{1}{2}at^2$$

$$d = \frac{1}{2}(2)(4^2)$$

$$d = 16 \text{ m}$$

Ejercicio 5. Salida de una carrera

Situación: una atleta parte del reposo y acelera uniformemente durante los primeros segundos de una carrera.

Datos:

Velocidad inicial: $v_i = 0 \text{ m/s}$

Velocidad después de 5 s: $v_f = 10 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Calcula la aceleración.
2. Calcula el desplazamiento durante los primeros 5 s.
3. Construye una tabla velocidad-tiempo.
4. Describe la gráfica velocidad-tiempo.

5. Calcula el área bajo la gráfica y comprueba el desplazamiento.
6. Determina la velocidad que tendría en 6 s si mantuviera la misma aceleración.

Interpretación: explica por qué la velocidad media durante el intervalo no es igual a la velocidad final.

2.8.6. Movimiento de una pelota en deportes

Los lanzamientos deportivos pueden analizarse mediante el movimiento parabólico.

Una pelota lanzada oblicuamente combina:

- movimiento horizontal aproximadamente uniforme;
- movimiento vertical acelerado por la gravedad.

Ejemplo explicado

Una pelota posee:

$$v_{0x} = 12 \text{ m/s}$$

y permanece en el aire:

$$2,5 \text{ s}$$

Su alcance horizontal es:

$$R = 12 \times 2,5$$

$$R = 30 \text{ m}$$

Ejercicio 6. Lanzamiento de un balón

Situación: un balón es lanzado y regresa aproximadamente al mismo nivel desde el que salió.

Datos:

Componente horizontal inicial: $v_{0x} = 14 \text{ m/s}$

Componente vertical inicial: $v_{0y} = 14,7 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el tiempo de ascenso.
2. Calcula la altura máxima.
3. Calcula el tiempo total de vuelo.
4. Calcula el alcance horizontal.

5. Determina la posición horizontal cuando alcanza la altura máxima.
6. Explica qué componente de la velocidad permanece constante en el modelo ideal.

Interpretación: explica cómo un mismo fenómeno deportivo requiere utilizar simultáneamente movimiento uniforme y movimiento acelerado.

2.8.7. Comparación de dos medios de transporte

Las Matemáticas permiten comparar recorridos con diferentes distancias y tiempos.

Ejemplo explicado

Una bicicleta recorre:

6 km en 20 min

mientras un autobús recorre:

9 km en 25 min

La comparación no debe basarse únicamente en la distancia. Es necesario relacionarla con el tiempo.

Ejercicio 7. Bicicleta o autobús

Situación: una estudiante analiza dos alternativas para desplazarse a una institución educativa.

Datos:

Bicicleta:

Distancia: **7 km**

Tiempo: **28 min**

Autobús:

Distancia: **10 km**

Tiempo: **30 min**

Actividades:

1. Calcula la rapidez media de la bicicleta en km/h.
2. Calcula la rapidez media del autobús en km/h.
3. Determina cuál presenta mayor rapidez media.
4. Determina cuál opción requiere menos tiempo total.
5. Calcula la diferencia entre las distancias recorridas.
6. Explica por qué una mayor rapidez no significa necesariamente un ahorro considerable de tiempo.

Interpretación: identifica otros factores reales que podrían formar parte de una decisión de transporte.

2.8.8. Encuentro entre dos móviles

Las ecuaciones de posición permiten determinar cuándo dos móviles se encuentran.

Si:

$$x_A = x_B$$

en un mismo instante, ambos ocupan la misma posición.

Ejemplo explicado

Móvil A:

$$x_A = 4t$$

Móvil B:

$$x_B = 30 - 2t$$

Iguálamos:

$$4t = 30 - 2t$$

$$6t = 30$$

$$t = 5 \text{ s}$$

Posición:

$$x = 20 \text{ m}$$

Ejercicio 8. Encuentro de dos ciclistas

Situación: dos ciclistas se aproximan uno al otro sobre una vía recta.

Datos:

Ciclista A: $x_A = 5t$

Ciclista B: $x_B = 60 - 7t$

Posición en metros.

Tiempo en segundos.

Actividades:

1. Identifica la posición inicial de cada ciclista.
2. Identifica la velocidad de cada uno.
3. Interpreta los signos de las velocidades.
4. Iguala las ecuaciones.
5. Calcula el instante del encuentro.
6. Calcula la posición donde ocurre.
7. Comprueba el resultado en ambas ecuaciones.

Interpretación: explica cómo los signos de las velocidades muestran que los ciclistas se desplazan en sentidos opuestos.

2.8.9. Caída de un objeto y seguridad

La caída libre permite analizar situaciones relacionadas con objetos que caen desde cierta altura.

Ejemplo explicado

Un objeto se deja caer desde:

$$h = 19,6 \text{ m}$$

Utilizando:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

tenemos:

$$19,6 = 4,9t^2$$

$$t = 2 \text{ s}$$

El objeto tarda aproximadamente 2 s en llegar al suelo bajo el modelo ideal.

Ejercicio 9. Objeto que cae desde una estructura

Situación: una pequeña esfera se deja caer desde una plataforma y se desprecia la resistencia del aire.

Datos:

Altura: $h = 31,36 \text{ m}$

Velocidad inicial: $v_0 = 0 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el tiempo de caída.
2. Calcula la velocidad inmediatamente antes de llegar al suelo.

3. Construye la ecuación de altura en función del tiempo.
4. Calcula la altura restante después de 1 s.
5. Describe la gráfica altura-tiempo.
6. Identifica los supuestos físicos del modelo.

Interpretación: explica por qué la velocidad del objeto aumenta mientras la altura disminuye.

2.8.10. Análisis crítico de resultados

Una respuesta numérica debe evaluarse físicamente antes de aceptarse.

Supongamos que un cálculo indica que una bicicleta urbana se desplaza a:

350 m/s

Aunque las operaciones pudieran haberse ejecutado correctamente, el resultado debería generar dudas.

El análisis debe incluir:

- revisión de unidades;
- revisión de conversiones;
- comprobación de la ecuación utilizada;
- comparación con el contexto;
- revisión del orden de magnitud.

Ejercicio 10. Detección y corrección de resultados incoherentes

Situación: varios estudiantes presentan respuestas a problemas de movimiento.

Datos:

A. Corredor: **8 m/s**

B. Bicicleta: **6 m/s**

C. Automóvil: **22 m/s**

D. Persona caminando: **180 m/s**

E. Pelota deportiva: **15 m/s**

Actividades:

1. Identifica el resultado que parece físicamente incoherente.
2. Justifica tu elección.
3. Propón una posible conversión incorrecta que pudiera producirlo.
4. Convierte 180 m/s a km/h para analizar mejor el resultado.
5. Explica qué procedimiento seguirías antes de aceptar cualquier respuesta numérica.

Interpretación: explica por qué la razonabilidad física debe formar parte de la resolución de problemas y no considerarse una comprobación opcional.

Actividad integradora. Seguridad vial y análisis completo del movimiento

Situación: un automóvil circula por una avenida cuando el conductor observa un obstáculo. Primero transcurre el tiempo de reacción y después comienza un frenado uniforme.

Datos:

Velocidad inicial: $v_i = 18 \text{ m/s}$

Tiempo de reacción: $t_r = 0,8 \text{ s}$

Aceleración durante el frenado: $a = -4,5 \text{ m/s}^2$

Distancia del vehículo al obstáculo en el instante de detección: **55 m**

Actividades:

1. Calcula la distancia recorrida durante el tiempo de reacción.
2. Calcula el tiempo necesario para detenerse desde que comienza el frenado.
3. Calcula la distancia recorrida durante el frenado.
4. Calcula la distancia total de detención.
5. Determina si el vehículo se detiene antes de alcanzar el obstáculo.
6. Calcula el margen de distancia restante o la distancia que faltaría.
7. Construye una gráfica velocidad-tiempo aproximada para todo el proceso.
8. Identifica en la gráfica el intervalo correspondiente al tiempo de reacción.
9. Identifica el intervalo correspondiente al frenado.
10. Explica cómo podría calcularse el desplazamiento utilizando el área bajo la gráfica velocidad-tiempo.
11. Analiza qué ocurriría con la distancia de reacción si el conductor tardara 1,2 s en reaccionar.
12. Explica qué ocurriría con la distancia de frenado si la magnitud de la desaceleración fuera menor.

Interpretación: redacta una conclusión que relacione velocidad, tiempo de reacción, aceleración, distancia de frenado y seguridad vial. Explica por qué comprender matemáticamente el movimiento puede ayudar a interpretar decisiones y riesgos presentes en situaciones cotidianas.

Idea fundamental

Los problemas integradores muestran que los conceptos de movimiento no aparecen de manera aislada. Una situación real puede requerir interpretar distancias y desplazamientos, convertir unidades, calcular velocidades, utilizar aceleraciones, construir funciones, analizar gráficas y evaluar resultados.

La Física proporciona los modelos para describir el movimiento y las Matemáticas permiten expresarlos, resolverlos y compararlos. La solución completa de un problema

exige además interpretar el resultado, comprobar su coherencia y reconocer las condiciones bajo las cuales el modelo utilizado representa adecuadamente la situación real.

CAPÍTULO 3. FUERZAS, VECTORES Y EQUILIBRIO

3.1. Las fuerzas y su representación matemática

Concepto de fuerza, magnitud, dirección y sentido

En la vida cotidiana es posible observar numerosos efectos asociados con las fuerzas. Empujar una puerta para abrirla, levantar una mochila, detener una pelota, comprimir un resorte o mantener un objeto apoyado sobre una mesa son situaciones en las que existen interacciones entre cuerpos.

En Física, una **fuerza** representa una interacción capaz de modificar el estado de movimiento de un cuerpo o producir una deformación. Una fuerza puede hacer que un objeto inicialmente en reposo comience a moverse, modificar su velocidad, cambiar la dirección de su movimiento o alterar temporal o permanentemente su forma.

La fuerza es una magnitud vectorial. Esto significa que para describirla completamente no basta con indicar únicamente su valor numérico. También es necesario especificar su dirección y su sentido.

En el Sistema Internacional, la unidad de fuerza es el newton, cuyo símbolo es **N**.

Por ejemplo, afirmar:

$$\mathbf{F} = 20 \text{ N}$$

proporciona la magnitud de una fuerza, pero todavía no constituye una descripción vectorial completa. Es necesario indicar hacia dónde actúa.

Una descripción más precisa sería:

$$\mathbf{F} = 20 \text{ N hacia la derecha}$$

3.1.1. Magnitud de una fuerza

La **magnitud**, también denominada módulo, indica el valor cuantitativo de la fuerza.

Si una persona empuja una caja con una fuerza de:

$$\mathbf{F} = 50 \text{ N}$$

el valor 50 representa la magnitud y el newton representa la unidad.

Dos fuerzas pueden tener la misma magnitud y producir efectos diferentes si actúan en direcciones o sentidos distintos.

Ejemplo explicado

Consideremos dos personas que ejercen sobre una caja fuerzas de 30 N.

La primera aplica:

30 N hacia la derecha

y la segunda:

30 N hacia la izquierda

Las magnitudes son iguales, pero los sentidos son opuestos.

Por esta razón, no es suficiente comparar solamente los valores numéricos.

Ejercicio 1. Identificación de las características de una fuerza

Situación: diferentes personas ejercen fuerzas sobre varios objetos.

Datos:

Fuerza A: **25 N hacia la derecha**

Fuerza B: **40 N hacia arriba**

Fuerza C: **25 N hacia la izquierda**

Fuerza D: **15 N hacia abajo**

Actividades:

1. Identifica la magnitud de cada fuerza.
2. Determina cuáles poseen la misma magnitud.
3. Identifica las fuerzas horizontales.
4. Identifica las fuerzas verticales.
5. Determina cuáles actúan en sentidos opuestos.
6. Ordena las fuerzas desde la menor hasta la mayor magnitud.

Interpretación: explica por qué dos fuerzas con la misma magnitud no tienen que representar necesariamente la misma interacción.

3.1.2. Dirección y sentido

La **dirección** corresponde a la línea sobre la cual actúa una fuerza. Puede ser horizontal, vertical, diagonal o describirse mediante un ángulo respecto de un eje de referencia.

El **sentido** indica hacia cuál de las dos orientaciones posibles de esa dirección actúa la fuerza.

Por ejemplo, dos fuerzas pueden poseer dirección horizontal, pero una actuar hacia la derecha y otra hacia la izquierda.

De manera semejante, dos fuerzas verticales pueden actuar hacia arriba o hacia abajo.

Ejemplo explicado

Una caja es empujada horizontalmente.

Fuerza 1:

$F_1 = 18 \text{ N}$ hacia la derecha

Fuerza 2:

$F_2 = 12 \text{ N}$ hacia la izquierda

Ambas poseen dirección horizontal, pero sentidos opuestos.

Si definimos la derecha como sentido positivo, podemos representar:

$F_1 = +18 \text{ N}$

$F_2 = -12 \text{ N}$

Los signos permiten incorporar el sentido dentro de una representación matemática unidimensional.

Ejercicio 2. Dirección, sentido y signo

Situación: sobre un objeto actúan varias fuerzas horizontales y verticales.

Datos:

A: **35 N hacia la derecha**

B: **20 N hacia la izquierda**

C: **15 N hacia arriba**

D: **10 N hacia abajo**

Actividades:

1. Clasifica las fuerzas según su dirección.
2. Identifica el sentido de cada una.
3. Considera derecha y arriba como sentidos positivos.
4. Asigna un signo a cada fuerza.
5. Representa matemáticamente las cuatro fuerzas utilizando magnitud y signo.

Interpretación: explica qué información aporta el signo y por qué depende del sistema de referencia seleccionado.

3.1.3. Representación gráfica mediante vectores

Una fuerza puede representarse gráficamente mediante una **flecha o vector**.

En esta representación:

- la longitud de la flecha representa la magnitud;
- la orientación de la línea representa la dirección;
- la punta de la flecha indica el sentido;
- el punto donde comienza puede representar el punto de aplicación.

Si se establece una escala:

1 cm representa 10 N

una fuerza de 40 N puede dibujarse mediante una flecha de 4 cm.

La representación debe conservar la escala para poder comparar correctamente diferentes fuerzas.

Ejercicio 3. Representación de fuerzas a escala

Situación: se desea representar gráficamente varias fuerzas utilizando una misma escala.

Datos:

Escala: **1 cm = 10 N**

Fuerza A: **20 N hacia la derecha**

Fuerza B: **50 N hacia la izquierda**

Fuerza C: **30 N hacia arriba**

Fuerza D: **40 N hacia abajo**

Actividades:

1. Calcula la longitud que debe tener cada vector.
2. Representa gráficamente las cuatro fuerzas.
3. Rotula cada vector.
4. Comprueba que las direcciones y sentidos sean correctos.
5. Identifica visualmente cuál posee mayor magnitud.

Interpretación: explica por qué la utilización de una escala permite transformar una magnitud física en una representación geométrica.

3.1.4. Fuerzas como vectores en el plano

Cuando una fuerza no actúa únicamente en dirección horizontal o vertical, puede representarse mediante componentes cartesianas.

Consideremos una fuerza:

F = 50 N

que forma un ángulo de:

$$\theta = 30^\circ$$

respecto del eje horizontal positivo.

La componente horizontal se obtiene mediante:

$$F_x = F \cos \theta$$

y la componente vertical mediante:

$$F_y = F \sin \theta$$

Entonces:

$$F_x = 50 \cos 30^\circ$$

$$F_x \approx 43,3 \text{ N}$$

y:

$$F_y = 50 \sin 30^\circ$$

$$F_y = 25 \text{ N}$$

Una única fuerza oblicua puede ser representada mediante dos componentes perpendiculares.

Ejercicio 4. Descomposición de una fuerza

Situación: una persona hala un objeto mediante una cuerda que forma un ángulo con la horizontal.

Datos:

Magnitud de la fuerza: **$F = 60 \text{ N}$**

Ángulo respecto de la horizontal: **$\theta = 40^\circ$**

Actividades:

1. Calcula la componente horizontal.
2. Calcula la componente vertical.
3. Expresa ambas componentes en newtons.
4. Representa esquemáticamente la fuerza y sus componentes.
5. Compara las magnitudes de las componentes.

Interpretación: explica por qué una fuerza oblicua puede analizarse mediante dos fuerzas perpendiculares sin modificar su efecto vectorial equivalente.

3.1.5. Fuerza resultante

Cuando varias fuerzas actúan simultáneamente sobre un cuerpo, puede determinarse una única fuerza equivalente denominada **fuerza resultante** o **fuerza neta**.

En una dimensión, si se establece un sentido positivo, las fuerzas pueden sumarse algebraicamente.

Consideremos:

$$F_1 = +20 \text{ N}$$

$$F_2 = -8 \text{ N}$$

La fuerza resultante es:

$$F_r = F_1 + F_2$$

$$F_r = 20 \text{ N} - 8 \text{ N}$$

$$F_r = 12 \text{ N}$$

El signo positivo indica que la fuerza resultante actúa hacia el sentido definido como positivo.

Ejercicio 5. Fuerza resultante en una dimensión

Situación: dos personas empujan una caja horizontalmente en sentidos opuestos.

Datos:

Fuerza hacia la derecha: **45 N**

Fuerza hacia la izquierda: **30 N**

Derecha: sentido positivo.

Actividades:

1. Asigna el signo correspondiente a cada fuerza.
2. Escribe la suma algebraica.
3. Calcula la fuerza resultante.
4. Determina su magnitud.
5. Determina su sentido.
6. Representa las fuerzas y la resultante mediante vectores.

Interpretación: explica por qué la fuerza resultante no es igual a la suma de las magnitudes cuando las fuerzas poseen sentidos opuestos.

3.1.6. Fuerzas equilibradas

Si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre un objeto es cero:

$$F_r = 0 \text{ N}$$

las fuerzas se encuentran equilibradas.

Esto no significa necesariamente que el objeto esté en reposo. También puede desplazarse con velocidad constante.

Ejemplo explicado

Sobre una caja actúan:

20 N hacia la derecha

y:

20 N hacia la izquierda

Entonces:

$$F_r = 20 \text{ N} - 20 \text{ N}$$

$$F_r = 0 \text{ N}$$

Las fuerzas se equilibran.

Ejercicio 6. Equilibrio de fuerzas

Situación: un objeto experimenta varias fuerzas horizontales.

Datos:

$F_1 = 15 \text{ N}$ hacia la derecha

$F_2 = 25 \text{ N}$ hacia la derecha

$F_3 = 40 \text{ N}$ hacia la izquierda

Actividades:

1. Establece un sentido positivo.
2. Asigna signos a las fuerzas.
3. Calcula la fuerza resultante.
4. Determina si las fuerzas están equilibradas.
5. Representa la situación mediante vectores.

Interpretación: explica por qué una fuerza resultante igual a cero no permite concluir automáticamente que el cuerpo se encuentra en reposo.

Actividad integradora. Representación matemática de un sistema de fuerzas

Situación: una caja es sometida a varias fuerzas en el plano.

Datos:

Fuerza A: **40 N hacia la derecha**

Fuerza B: **15 N hacia la izquierda**

Fuerza C: **30 N hacia arriba**

Fuerza D: **10 N hacia abajo**

Actividades:

1. Representa las cuatro fuerzas mediante vectores.
2. Calcula la componente resultante horizontal.
3. Calcula la componente resultante vertical.
4. Expresa la resultante mediante sus componentes.
5. Calcula la magnitud de la fuerza resultante utilizando el teorema de Pitágoras.
6. Determina aproximadamente su dirección respecto del eje horizontal.
7. Identifica el sentido de cada componente.

Interpretación: explica cómo el álgebra, la geometría y la trigonometría permiten describir conjuntamente el efecto de varias fuerzas.

Idea fundamental

Una fuerza no queda completamente determinada mediante un número. Como magnitud vectorial, requiere especificar **magnitud, dirección y sentido**.

La representación mediante vectores permite convertir una interacción física en un objeto matemático que puede dibujarse, descomponerse en componentes y combinarse con otras fuerzas.

3.2. Vectores en el plano

Representación gráfica y algebraica de vectores

Muchas magnitudes físicas no pueden describirse completamente mediante un único valor numérico. La fuerza, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración requieren información acerca de una dirección y un sentido.

Los **vectores** constituyen la herramienta matemática que permite representar estas magnitudes.

Geométricamente, un vector puede visualizarse como un segmento orientado. Algebraicamente, puede expresarse mediante sus componentes respecto de un sistema de coordenadas.

En el plano cartesiano, un vector puede escribirse como:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y)$$

donde:

- $\mathbf{A}_x$ representa su componente horizontal;
- $\mathbf{A}_y$ representa su componente vertical.

3.2.1. Componentes de un vector

Consideremos un vector:

$$\mathbf{A} = (4, 3)$$

Esto significa que posee:

Componente horizontal:

$$\mathbf{A}_x = 4$$

Componente vertical:

$$\mathbf{A}_y = 3$$

Geométicamente, puede interpretarse como un desplazamiento de 4 unidades en el sentido positivo del eje x y 3 unidades en el sentido positivo del eje y.

Ejercicio 1. Interpretación de componentes vectoriales

Situación: se presentan varios vectores expresados mediante componentes cartesianas.

Datos:

$$\mathbf{A} = (4, 3)$$

$$\mathbf{B} = (-5, 2)$$

$$\mathbf{C} = (3, -4)$$

$$\mathbf{D} = (-2, -6)$$

Actividades:

1. Identifica la componente horizontal de cada vector.
2. Identifica la componente vertical.
3. Determina cuáles poseen componente horizontal positiva.
4. Determina cuáles poseen componente vertical negativa.
5. Identifica el cuadrante hacia el que apunta cada vector.
6. Representa los cuatro vectores desde el origen.

Interpretación: explica cómo los signos de las componentes permiten conocer el sentido general de un vector.

3.2.2. Vector definido por dos puntos

Si un desplazamiento comienza en un punto:

$$\mathbf{A} = (x_1, y_1)$$

y termina en:

$$\mathbf{B} = (x_2, y_2)$$

el vector desplazamiento se obtiene restando las coordenadas:

$$\mathbf{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Ejemplo explicado

Consideremos:

$$\mathbf{A} = (2, 1)$$

$$\mathbf{B} = (7, 5)$$

Entonces:

Componente horizontal:

$$\Delta x = 7 - 2 = 5$$

Componente vertical:

$$\Delta y = 5 - 1 = 4$$

Por tanto:

$$\mathbf{AB} = (5, 4)$$

Ejercicio 2. Construcción de un vector a partir de posiciones

Situación: un robot cambia de posición dentro de un plano cartesiano.

Datos:

Posición inicial: $\mathbf{A} = (-2 \text{ m}, 3 \text{ m})$

Posición final: $\mathbf{B} = (6 \text{ m}, 9 \text{ m})$

Actividades:

1. Calcula la componente horizontal del desplazamiento.
2. Calcula la componente vertical.
3. Escribe el vector desplazamiento.
4. Representa las posiciones inicial y final.
5. Dibuja el vector desde A hasta B.

Interpretación: explica por qué las componentes del vector representan cambios de coordenadas y no las coordenadas absolutas del punto final.

3.2.3. Magnitud de un vector

Las componentes forman los catetos de un triángulo rectángulo. Por ello, la magnitud de un vector puede calcularse mediante el teorema de Pitágoras.

Para:

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y)$$

su magnitud es:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Ejemplo explicado

Consideremos:

$$\mathbf{A} = (3, 4)$$

Entonces:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{25}$$

$$|\mathbf{A}| = 5$$

Si el vector representa una fuerza y las componentes están expresadas en newtons:

$$|\mathbf{A}| = 5 \text{ N}$$

Ejercicio 3. Cálculo de la magnitud de vectores

Situación: tres fuerzas se expresan mediante sus componentes.

Datos:

$$\mathbf{A} = (6 \text{ N}, 8 \text{ N})$$

$$\mathbf{B} = (5 \text{ N}, 12 \text{ N})$$

$$C = (8 \text{ N}, 15 \text{ N})$$

Actividades:

1. Calcula la magnitud del vector A.
2. Calcula la magnitud del vector B.
3. Calcula la magnitud del vector C.
4. Ordena los vectores según su magnitud.
5. Representa al menos uno mediante un triángulo rectángulo.

Interpretación: explica la relación entre el teorema de Pitágoras y la magnitud de un vector en el plano.

3.2.4. Dirección de un vector

La orientación de un vector puede especificarse mediante un ángulo medido respecto del eje horizontal positivo.

Si conocemos las componentes:

$$A_x$$

y:

$$A_y$$

podemos utilizar:

$$\tan \theta = A_y / A_x$$

De aquí:

$$\theta = \arctan(A_y / A_x)$$

Sin embargo, para determinar correctamente el ángulo es necesario considerar también los signos de las componentes y el cuadrante en el que se encuentra el vector.

Ejemplo explicado

Para:

$$A = (4, 3)$$

tenemos:

$$\tan \theta = 3/4$$

Por tanto:

$$\theta \approx 36,9^\circ$$

El vector se encuentra en el primer cuadrante.

Ejercicio 4. Determinación de la dirección de un vector

Situación: una fuerza posee dos componentes positivas.

Datos:

Componente horizontal: $F_x = 12 \text{ N}$

Componente vertical: $F_y = 5 \text{ N}$

Actividades:

1. Representa las componentes en el plano.
2. Calcula la magnitud de la fuerza.
3. Calcula la razón F_y/F_x .
4. Determina el ángulo respecto del eje horizontal positivo.
5. Identifica el cuadrante correspondiente.

Interpretación: explica por qué una magnitud y un ángulo pueden proporcionar otra forma de describir el mismo vector.

3.2.5. De magnitud y dirección a componentes

Si conocemos la magnitud de un vector y el ángulo que forma con el eje horizontal, podemos recuperar sus componentes mediante trigonometría.

Componente horizontal:

$$A_x = A \cos \theta$$

Componente vertical:

$$A_y = A \sin \theta$$

Ejemplo explicado

Un vector tiene:

$$A = 20 \text{ unidades}$$

y:

$$\theta = 60^\circ$$

Entonces:

$$A_x = 20 \cos 60^\circ$$

$$A_x = 10$$

y:

$$A_y = 20 \sin 60^\circ$$

$$A_y \approx 17,32$$

Ejercicio 5. Obtención de componentes mediante trigonometría

Situación: una fuerza oblicua actúa sobre un objeto.

Datos:

Magnitud: $F = 80 \text{ N}$

Ángulo: $\theta = 35^\circ$

Actividades:

1. Calcula la componente horizontal.
2. Calcula la componente vertical.
3. Expresa ambas en newtons.
4. Comprueba aproximadamente que las componentes permiten recuperar la magnitud original mediante Pitágoras.
5. Representa la fuerza y sus componentes.

Interpretación: explica por qué las componentes no son fuerzas adicionales, sino una representación equivalente de la fuerza original.

3.2.6. Vectores opuestos

Dos vectores son opuestos cuando poseen la misma magnitud y dirección, pero sentidos contrarios.

Si:

$$\mathbf{A} = (4, 3)$$

su vector opuesto es:

$$-\mathbf{A} = (-4, -3)$$

Ambos tienen la misma magnitud.

Ejercicio 6. Construcción de vectores opuestos

Situación: se presentan varios vectores.

Datos:

$$A = (5, 2)$$

$$B = (-3, 7)$$

$$C = (4, -6)$$

Actividades:

1. Escribe el vector opuesto de A.
2. Escribe el vector opuesto de B.
3. Escribe el vector opuesto de C.
4. Calcula las magnitudes de A y $-A$.
5. Comprueba que son iguales.
6. Representa gráficamente un vector y su opuesto.

Interpretación: explica qué características se mantienen y cuáles cambian al multiplicar un vector por -1 .

3.2.7. Multiplicación de un vector por un escalar

Un vector puede multiplicarse por un número real denominado **escalar**.

Si:

$$A = (2, 3)$$

entonces:

$$2A = (4, 6)$$

La magnitud se duplica y la dirección se mantiene.

Si el escalar es negativo:

$$-2A = (-4, -6)$$

además de duplicarse la magnitud, el sentido se invierte.

Ejercicio 7. Escalamiento de vectores

Situación: un vector representa un desplazamiento.

Datos:

$$A = (3 \text{ m}, 4 \text{ m})$$

Actividades:

1. Calcula $2A$.
2. Calcula $\frac{1}{2}A$.
3. Calcula $-A$.

4. Calcula $-3A$.
5. Compara las magnitudes de los vectores obtenidos.
6. Representa A , $2A$ y $-A$ en el mismo plano.

Interpretación: explica cómo el valor y el signo del escalar modifican la magnitud y el sentido del vector.

Actividad integradora. De la representación gráfica a la algebraica

Situación: una fuerza se representa mediante sus componentes cartesianas.

Datos:

Componente horizontal: $F_x = -24 \text{ N}$

Componente vertical: $F_y = 18 \text{ N}$

Actividades:

1. Escribe el vector en forma de componentes.
2. Identifica el cuadrante hacia el que apunta.
3. Calcula su magnitud.
4. Representa el vector gráficamente.
5. Calcula el ángulo de referencia.
6. Determina su orientación respecto del eje horizontal considerando el cuadrante.
7. Escribe el vector opuesto.
8. Calcula la magnitud del vector opuesto.

Interpretación: explica cómo las representaciones gráfica, cartesiana y trigonométrica pueden describir el mismo vector.

Idea fundamental

Un vector puede describirse mediante una flecha, mediante componentes cartesianas o mediante una magnitud y una dirección angular.

Estas representaciones son equivalentes y permiten conectar la geometría del plano con magnitudes físicas como fuerza, desplazamiento, velocidad y aceleración.

3.3. Operaciones con vectores

Suma, resta, multiplicación por escalares y aplicación a magnitudes físicas

Cuando varias magnitudes vectoriales intervienen en un mismo fenómeno, es necesario combinarlas respetando no solo sus magnitudes, sino también sus direcciones y sentidos.

Las operaciones vectoriales permiten determinar desplazamientos totales, fuerzas resultantes, cambios de velocidad y otras cantidades físicas.

A diferencia de las magnitudes escalares, los vectores no se suman simplemente utilizando sus magnitudes. El resultado depende de su orientación.

3.3.1. Suma de vectores en una dimensión

Cuando los vectores actúan sobre una misma línea, pueden sumarse algebraicamente después de establecer un sentido positivo.

Consideremos:

A = 15 unidades hacia la derecha

B = 8 unidades hacia la derecha

Si la derecha es positiva:

$$\mathbf{A = +15}$$

$$\mathbf{B = +8}$$

Entonces:

$$\mathbf{R = A + B}$$

$$\mathbf{R = 23}$$

La resultante actúa hacia la derecha.

Ejemplo con sentidos opuestos

Consideremos:

$$\mathbf{A = +15}$$

$$\mathbf{B = -8}$$

Entonces:

$$\mathbf{R = 15 - 8}$$

$$\mathbf{R = 7}$$

La resultante posee magnitud 7 y sentido positivo.

Ejercicio 1. Suma vectorial en una dimensión

Situación: sobre una caja actúan dos fuerzas horizontales.

Datos:

Fuerza A: **35 N hacia la derecha**

Fuerza B: **20 N hacia la izquierda**

Derecha: sentido positivo.

Actividades:

1. Asigna el signo correspondiente a cada fuerza.
2. Escribe la suma algebraica.
3. Calcula la resultante.
4. Determina la magnitud de la resultante.
5. Determina su sentido.
6. Representa las tres fuerzas mediante flechas.

Interpretación: explica por qué sumar dos fuerzas vectoriales puede producir una resultante menor que cualquiera de las sumas aritméticas de sus magnitudes.

3.3.2. Método gráfico cabeza-cola

Dos vectores también pueden sumarse gráficamente mediante el método **cabeza-cola**.

Para ello:

1. se dibuja el primer vector;
2. el origen del segundo se coloca en la punta del primero;
3. la resultante se dibuja desde el origen del primer vector hasta la punta del segundo.

Este procedimiento conserva la magnitud, la dirección y el sentido de cada vector.

Ejemplo explicado

Una persona camina:

4 m hacia el este

y posteriormente:

3 m hacia el norte

Los desplazamientos forman un triángulo rectángulo.

La magnitud del desplazamiento resultante es:

$$R = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$R = 5 \text{ m}$$

La distancia recorrida fue 7 m, pero el desplazamiento resultante posee una magnitud de 5 m.

Ejercicio 2. Suma gráfica de desplazamientos

Situación: una persona realiza dos desplazamientos consecutivos.

Datos:

Primer desplazamiento: **6 m hacia el este**

Segundo desplazamiento: **8 m hacia el norte**

Actividades:

1. Representa el primer vector.
2. Coloca el segundo utilizando el método cabeza-cola.
3. Dibuja el vector resultante.
4. Calcula la magnitud de la resultante.
5. Calcula la distancia total recorrida.
6. Compara distancia y magnitud del desplazamiento.

Interpretación: explica por qué la suma vectorial de dos desplazamientos perpendiculares no se obtiene sumando directamente sus magnitudes.

3.3.3. Suma mediante componentes

El método algebraico resulta especialmente útil cuando existen varios vectores.

Si:

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y)$$

y:

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y)$$

su suma es:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

con:

$$R_x = A_x + B_x$$

$$R_y = A_y + B_y$$

Ejemplo explicado

Consideremos:

$$\mathbf{A} = (4, 3)$$

$$\mathbf{B} = (2, -1)$$

Entonces:

$$R_x = 4 + 2 = 6$$

$$R_y = 3 - 1 = 2$$

Por tanto:

$$\mathbf{R} = (6, 2)$$

Su magnitud es:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{6^2 + 2^2}$$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{40}$$

$$|\mathbf{R}| \approx 6,32$$

Ejercicio 3. Suma algebraica de vectores

Situación: dos fuerzas actúan simultáneamente sobre un objeto.

Datos:

$$\mathbf{A} = (12 \text{ N}, 5 \text{ N})$$

$$\mathbf{B} = (-4 \text{ N}, 7 \text{ N})$$

Actividades:

1. Suma las componentes horizontales.
2. Suma las componentes verticales.
3. Escribe el vector resultante.
4. Calcula su magnitud.
5. Identifica el cuadrante de la resultante.
6. Representa los tres vectores en el plano.

Interpretación: explica por qué sumar por separado las componentes permite obtener correctamente la resultante.

3.3.4. Resta de vectores

La resta de vectores puede interpretarse como la suma del vector opuesto.

Si:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

entonces:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

En componentes:

$$R_x = A_x - B_x$$

$$R_y = A_y - B_y$$

Ejemplo explicado

Consideremos:

$$A = (8, 5)$$

$$B = (3, 2)$$

Entonces:

$$A - B = (8 - 3, 5 - 2)$$

$$A - B = (5, 3)$$

Ejercicio 4. Resta de vectores mediante componentes

Situación: se desea determinar la diferencia entre dos vectores.

Datos:

$$A = (10, 8)$$

$$B = (4, -2)$$

Actividades:

1. Calcula $A - B$.
2. Calcula $B - A$.
3. Compara los resultados.
4. Calcula la magnitud de $A - B$.
5. Comprueba que $B - A$ corresponde al vector opuesto de $A - B$.
6. Representa ambos resultados.

Interpretación: explica por qué la resta vectorial no es una operación conmutativa.

3.3.5. Resultante de varios vectores

Cuando intervienen tres o más vectores, pueden sumarse todas las componentes horizontales y verticales.

Si existen fuerzas:

$$F_1, F_2, F_3, \dots$$

la componente horizontal resultante es la suma de todas las componentes horizontales, y lo mismo ocurre con las componentes verticales.

Ejemplo explicado

Consideremos:

$$\mathbf{F}_1 = (10 \text{ N}, 0 \text{ N})$$

$$\mathbf{F}_2 = (-4 \text{ N}, 0 \text{ N})$$

$$\mathbf{F}_3 = (0 \text{ N}, 6 \text{ N})$$

Entonces:

$$R_x = 10 - 4 + 0$$

$$R_x = 6 \text{ N}$$

$$R_y = 0 + 0 + 6$$

$$R_y = 6 \text{ N}$$

La resultante es:

$$\mathbf{R} = (6 \text{ N}, 6 \text{ N})$$

Su magnitud:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{6^2 + 6^2}$$

$$|\mathbf{R}| \approx 8,49 \text{ N}$$

Ejercicio 5. Resultante de varias fuerzas

Situación: sobre un objeto actúan cuatro fuerzas.

Datos:

$$\mathbf{F}_1 = (20 \text{ N}, 0 \text{ N})$$

$$\mathbf{F}_2 = (-8 \text{ N}, 0 \text{ N})$$

$$\mathbf{F}_3 = (0 \text{ N}, 15 \text{ N})$$

$$\mathbf{F}_4 = (0 \text{ N}, -5 \text{ N})$$

Actividades:

1. Calcula la componente horizontal resultante.

2. Calcula la componente vertical resultante.
3. Escribe el vector resultante.
4. Calcula su magnitud.
5. Determina su dirección aproximada respecto del eje horizontal.
6. Representa el sistema y la resultante.

Interpretación: explica cómo una sola fuerza resultante puede representar el efecto vectorial conjunto de varias fuerzas.

3.3.6. Suma de vectores expresados mediante magnitud y ángulo

Cuando los vectores están expresados mediante magnitud y dirección angular, primero conviene descomponerlos en componentes.

Para cada vector:

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta$$

Luego se suman las componentes correspondientes.

Ejemplo explicado

Una fuerza de:

$$20 \text{ N}$$

actúa con:

$$\theta = 0^\circ$$

y otra fuerza de:

$$10 \text{ N}$$

actúa con:

$$\theta = 90^\circ$$

Sus componentes son:

Primera fuerza:

$$\mathbf{F}_1 = (20 \text{ N}, 0 \text{ N})$$

Segunda fuerza:

$$\mathbf{F}_2 = (0 \text{ N}, 10 \text{ N})$$

La resultante:

$$\mathbf{R} = (20 \text{ N}, 10 \text{ N})$$

Magnitud:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(20^2 + 10^2)}$$

$$|\mathbf{R}| \approx 22,36 \text{ N}$$

Ejercicio 6. Suma de fuerzas oblicuas mediante componentes

Situación: dos fuerzas actúan sobre un objeto en diferentes direcciones.

Datos:

Fuerza A: 40 N a 30° respecto de la horizontal positiva

Fuerza B: 30 N a 90° respecto de la horizontal positiva

Actividades:

1. Calcula las componentes de la fuerza A.
2. Calcula las componentes de la fuerza B.
3. Suma las componentes horizontales.
4. Suma las componentes verticales.
5. Calcula la magnitud de la resultante.
6. Determina su dirección aproximada.

Interpretación: explica por qué convertir primero los vectores a componentes simplifica la suma de fuerzas con direcciones diferentes.

3.3.7. Multiplicación por escalares

La multiplicación de un vector por un escalar permite modificar su magnitud.

Si:

$$\mathbf{A} = (3, 2)$$

entonces:

$$3\mathbf{A} = (9, 6)$$

La magnitud se multiplica por tres.

Si multiplicamos por un valor negativo:

$$-2\mathbf{A} = (-6, -4)$$

el vector cambia también de sentido.

Ejercicio 7. Aplicación de escalares a vectores

Situación: un vector desplazamiento se modifica mediante diferentes factores escalares.

Datos:

$$A = (4 \text{ m}, -3 \text{ m})$$

Actividades:

1. Calcula $2A$.
2. Calcula $0,5A$.
3. Calcula $-A$.
4. Calcula $-2A$.
5. Determina la magnitud de A .
6. Compara la magnitud de A con la magnitud de $2A$.
7. Representa A y $-A$.

Interpretación: explica qué efectos producen el valor absoluto y el signo del escalar sobre un vector.

3.3.8. Aplicación al desplazamiento

Las operaciones vectoriales permiten determinar el cambio neto de posición de una persona u objeto que realiza varios desplazamientos.

Ejemplo explicado

Una persona camina:

5 m hacia el este

3 m hacia el norte

2 m hacia el oeste

Las componentes totales son:

Horizontal:

$$R_x = 5 - 2 = 3 \text{ m}$$

Vertical:

$$R_y = 3 \text{ m}$$

Por tanto:

$$R = (3 \text{ m}, 3 \text{ m})$$

La magnitud es:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$|\mathbf{R}| \approx 4,24 \text{ m}$$

Ejercicio 8. Desplazamiento resultante de un recorrido

Situación: un estudiante se desplaza por varias calles perpendiculares.

Datos:

Primer tramo: **8 m hacia el este**

Segundo tramo: **6 m hacia el norte**

Tercer tramo: **3 m hacia el oeste**

Cuarto tramo: **2 m hacia el sur**

Actividades:

1. Asigna una componente cartesiana a cada desplazamiento.
2. Calcula la componente horizontal total.
3. Calcula la componente vertical total.
4. Escribe el vector desplazamiento resultante.
5. Calcula su magnitud.
6. Calcula la distancia total recorrida.
7. Compara distancia y desplazamiento.

Interpretación: explica por qué las operaciones vectoriales permiten conocer directamente el cambio neto de posición.

3.3.9. Condición de equilibrio vectorial

Un sistema está en equilibrio traslacional cuando la suma vectorial de las fuerzas es cero.

Esto requiere:

$$\mathbf{R}_x = 0 \text{ N}$$

y:

$$\mathbf{R}_y = 0 \text{ N}$$

Las fuerzas pueden ser numerosas y actuar en diferentes direcciones, pero sus componentes deben cancelarse.

Ejercicio 9. Análisis vectorial del equilibrio

Situación: sobre un objeto actúan cuatro fuerzas.

Datos:

$$F_1 = (12 \text{ N}, 0 \text{ N})$$

$$F_2 = (-12 \text{ N}, 0 \text{ N})$$

$$F_3 = (0 \text{ N}, 8 \text{ N})$$

$$F_4 = (0 \text{ N}, -8 \text{ N})$$

Actividades:

1. Calcula la componente horizontal resultante.
2. Calcula la componente vertical resultante.
3. Escribe el vector resultante.
4. Calcula su magnitud.
5. Determina si el sistema se encuentra en equilibrio.
6. Representa gráficamente las fuerzas.

Interpretación: explica por qué puede haber varias fuerzas actuando simultáneamente y, aun así, obtener una resultante igual a cero.

Actividad integradora. Fuerzas y operaciones vectoriales

Situación: tres personas ejercen fuerzas sobre un objeto desde diferentes direcciones.

Datos:

Fuerza A: **50 N hacia la derecha**

Fuerza B: **30 N hacia arriba**

Fuerza C: **20 N hacia la izquierda**

Actividades:

1. Representa cada fuerza mediante componentes cartesianas.
2. Suma las componentes horizontales.
3. Suma las componentes verticales.
4. Escribe el vector resultante.
5. Calcula su magnitud.
6. Calcula su dirección respecto del eje horizontal positivo.
7. Representa gráficamente la resultante.
8. Determina qué fuerza adicional debería aplicarse para producir equilibrio.
9. Expresa esa fuerza mediante componentes.
10. Compara la fuerza equilibrante con la resultante.

Interpretación: explica cómo las operaciones con vectores permiten pasar de varias interacciones físicas individuales a una descripción matemática única del efecto conjunto sobre un cuerpo.

Idea fundamental

Las operaciones con vectores permiten combinar correctamente magnitudes físicas que poseen dirección y sentido. La suma y la resta pueden realizarse gráficamente o mediante componentes cartesianas, mientras que la multiplicación por escalares modifica la magnitud y, en determinados casos, el sentido.

En problemas físicos, trabajar mediante componentes permite transformar situaciones geométricas en operaciones algebraicas. De esta manera, **álgebra, geometría, trigonometría y Física se integran para analizar desplazamientos, fuerzas y otras magnitudes vectoriales.**

3.4. Trigonometría aplicada a las fuerzas

Uso del seno, coseno y tangente para analizar componentes

En muchas situaciones físicas, las fuerzas no actúan únicamente en dirección horizontal o vertical. Una persona puede halar una caja mediante una cuerda inclinada, un objeto puede encontrarse sobre una rampa o varios cables pueden sostener una estructura formando diferentes ángulos. Para analizar estas situaciones es necesario relacionar la representación vectorial de las fuerzas con herramientas trigonométricas.

El seno, el coseno y la tangente permiten establecer relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Cuando una fuerza oblicua se representa mediante un vector, sus componentes horizontal y vertical forman precisamente los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde a la magnitud de la fuerza.

Por esta razón, la trigonometría proporciona un método para transformar una fuerza oblicua en dos componentes perpendiculares matemáticamente equivalentes.

3.4.1. El triángulo rectángulo y las razones trigonométricas

En un triángulo rectángulo, respecto de un ángulo θ , se definen tres razones fundamentales.

Seno:

$$\text{sen } \theta = \text{cateto opuesto} / \text{hipotenusa}$$

Coseno:

$$\text{cos } \theta = \text{cateto adyacente} / \text{hipotenusa}$$

Tangente:

$$\text{tan } \theta = \text{cateto opuesto} / \text{cateto adyacente}$$

Cuando una fuerza forma un ángulo θ respecto del eje horizontal, la fuerza total representa la hipotenusa del triángulo, mientras que sus componentes horizontal y vertical corresponden a los catetos.

Ejemplo explicado

Una fuerza de 50 N forma un ángulo de 30° respecto de la horizontal.

La componente horizontal es:

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_x = 50 \cos 30^\circ$$

$$F_x \approx 43,3 \text{ N}$$

La componente vertical es:

$$F_y = F \sen \theta$$

$$F_y = 50 \sen 30^\circ$$

$$F_y = 25 \text{ N}$$

Las dos componentes representan conjuntamente la misma fuerza original.

Ejercicio 1. Descomposición trigonométrica de una fuerza

Situación: una persona hala un objeto mediante una cuerda inclinada respecto del suelo.

Datos:

Magnitud de la fuerza: $F = 80 \text{ N}$

Ángulo respecto de la horizontal: $\theta = 35^\circ$

Actividades:

1. Identifica la hipotenusa del triángulo asociado.
2. Identifica cuál componente corresponde al cateto adyacente al ángulo.
3. Identifica cuál corresponde al cateto opuesto.
4. Calcula la componente horizontal.
5. Calcula la componente vertical.
6. Expresa ambas componentes en newtons.

Interpretación: explica por qué la suma aritmética de F_x y F_y no debe ser igual a 80 N.

3.4.2. Componentes horizontal y vertical

Para una fuerza de magnitud F que forma un ángulo θ respecto del eje horizontal positivo:

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sen \theta$$

Estas expresiones son válidas cuando el ángulo se mide desde el eje horizontal. Los signos de las componentes dependen del cuadrante hacia el que apunte el vector.

Por ejemplo, una fuerza dirigida hacia arriba y hacia la derecha posee:

$$F_x > 0$$

$$F_y > 0$$

Una fuerza dirigida hacia arriba y hacia la izquierda posee:

$$F_x < 0$$

$$F_y > 0$$

Por tanto, el cálculo trigonométrico proporciona la magnitud de las componentes, mientras que el sistema de referencia permite establecer sus signos.

Ejemplo explicado

Una fuerza de 100 N actúa a 40° sobre la horizontal hacia la izquierda.

Magnitud de la componente horizontal:

$$|F_x| = 100 \cos 40^\circ$$

$$|F_x| \approx 76,6 \text{ N}$$

Magnitud de la componente vertical:

$$|F_y| = 100 \sen 40^\circ$$

$$|F_y| \approx 64,3 \text{ N}$$

Si derecha y arriba son positivos:

$$F_x \approx -76,6 \text{ N}$$

$$F_y \approx +64,3 \text{ N}$$

Ejercicio 2. Componentes y signos

Situación: una fuerza actúa hacia arriba y hacia la izquierda formando un ángulo respecto de la horizontal.

Datos:

Magnitud: $F = 60 \text{ N}$

Ángulo: $\theta = 50^\circ$

Derecha: sentido positivo de x.

Arriba: sentido positivo de y.

Actividades:

1. Calcula la magnitud de la componente horizontal.
2. Calcula la magnitud de la componente vertical.
3. Asigna el signo correcto a F_x .
4. Asigna el signo correcto a F_y .
5. Escribe el vector fuerza mediante sus componentes.
6. Identifica el cuadrante hacia el que apunta.

Interpretación: explica por qué la trigonometría debe utilizarse conjuntamente con el sistema de referencia para describir completamente una fuerza.

3.4.3. Reconstrucción de una fuerza a partir de sus componentes

El proceso también puede realizarse en sentido contrario. Si conocemos las componentes horizontal y vertical de una fuerza, podemos calcular su magnitud mediante el teorema de Pitágoras:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

La dirección puede calcularse mediante la tangente:

$$\tan \theta = F_y/F_x$$

y posteriormente:

$$\theta = \arctan(F_y/F_x)$$

Para determinar correctamente la orientación final debe analizarse el cuadrante de las componentes.

Ejemplo explicado

Consideremos:

$$F_x = 12 \text{ N}$$

$$F_y = 5 \text{ N}$$

Magnitud:

$$F = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$F = \sqrt{169}$$

$$F = 13 \text{ N}$$

Para la dirección:

$$\tan \theta = 5/12$$

$$\theta \approx 22,6^\circ$$

La fuerza posee una magnitud de 13 N y forma aproximadamente $22,6^\circ$ sobre la horizontal positiva.

Ejercicio 3. De las componentes a la fuerza original

Situación: una fuerza ha sido descompuesta en dos componentes perpendiculares.

Datos:

Componente horizontal: $F_x = 24 \text{ N}$

Componente vertical: $F_y = 18 \text{ N}$

Actividades:

1. Representa las componentes mediante un triángulo rectángulo.
2. Calcula la magnitud de la fuerza resultante.
3. Calcula la razón F_y/F_x .
4. Determina el ángulo respecto de la horizontal.
5. Expresa la fuerza mediante magnitud y dirección.
6. Comprueba que ambas componentes poseen signos compatibles con el ángulo obtenido.

Interpretación: explica cómo el teorema de Pitágoras y la tangente permiten recuperar la representación original de un vector.

3.4.4. Fuerzas sobre superficies inclinadas

La trigonometría también resulta fundamental para estudiar cuerpos situados sobre planos inclinados.

El peso de un cuerpo actúa verticalmente hacia abajo y tiene magnitud:

$$P = mg$$

Cuando el objeto se encuentra sobre una superficie inclinada, resulta conveniente descomponer el peso en:

- una componente paralela a la superficie;
- una componente perpendicular a la superficie.

Para un plano que forma un ángulo θ con la horizontal:

$$P_{\parallel} = mg \sin \theta$$

$$P_{\perp} = mg \cos \theta$$

La componente paralela tiende a producir movimiento a lo largo de la pendiente. La componente perpendicular está relacionada con la interacción entre el objeto y la superficie.

Ejemplo explicado

Un bloque de 10 kg se encuentra sobre una rampa de 30° .

Utilizando:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

su peso es:

$$P = 10 \times 9,8$$

$$P = 98 \text{ N}$$

Componente paralela:

$$P_{\parallel} = 98 \sin 30^\circ$$

$$P_{\parallel} = 49 \text{ N}$$

Componente perpendicular:

$$P_{\perp} = 98 \cos 30^\circ$$

$$P_{\perp} \approx 84,9 \text{ N}$$

Ejercicio 4. Componentes del peso sobre una rampa

Situación: un bloque permanece sobre una superficie inclinada.

Datos:

Masa: $m = 20 \text{ kg}$

Ángulo de inclinación: $\theta = 25^\circ$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el peso del bloque.

2. Calcula la componente paralela del peso.
3. Calcula la componente perpendicular del peso.
4. Representa ambas componentes.
5. Determina cuál posee mayor magnitud.
6. Explica cómo cambiarían las componentes si aumentara el ángulo de inclinación.

Interpretación: explica por qué resulta más conveniente utilizar ejes paralelos y perpendiculares al plano cuando se analiza un objeto sobre una rampa.

3.4.5. Resultante de fuerzas oblicuas

Cuando actúan varias fuerzas oblicuas, cada una puede descomponerse en componentes. Posteriormente se suman algebraicamente todas las componentes horizontales y verticales.

Componente horizontal resultante:

$$R_x = \Sigma F_x$$

Componente vertical resultante:

$$R_y = \Sigma F_y$$

La magnitud de la resultante se calcula mediante:

$$R = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)}$$

y su orientación puede obtenerse mediante:

$$\tan \theta = R_y / R_x$$

Ejemplo explicado

Supongamos dos fuerzas:

Fuerza A: **40 N horizontal hacia la derecha**

Fuerza B: **30 N a 90° hacia arriba**

Entonces:

$$R_x = 40 \text{ N}$$

$$R_y = 30 \text{ N}$$

Magnitud:

$$R = \sqrt{(40^2 + 30^2)}$$

$$R = 50 \text{ N}$$

Dirección:

$$\theta = \arctan(30/40)$$

$$\theta \approx 36,9^\circ$$

Ejercicio 5. Resultante mediante trigonometría

Situación: dos fuerzas perpendiculares actúan simultáneamente sobre un objeto.

Datos:

Fuerza horizontal: $F_1 = 60 \text{ N}$ hacia la derecha

Fuerza vertical: $F_2 = 80 \text{ N}$ hacia arriba

Actividades:

1. Escribe las componentes resultantes.
2. Calcula la magnitud de la fuerza resultante.
3. Calcula el ángulo respecto del eje horizontal.
4. Representa gráficamente la resultante.
5. Comprueba el resultado utilizando el teorema de Pitágoras.

Interpretación: explica por qué la magnitud de la resultante no es 140 N.

Actividad integradora. Trigonometría y sistema de fuerzas

Situación: una caja es halada mediante una cuerda inclinada mientras otra fuerza horizontal actúa en sentido contrario.

Datos:

Fuerza de la cuerda: $F_1 = 100 \text{ N}$

Ángulo de la cuerda: $\theta = 30^\circ$

Fuerza opuesta horizontal: $F_2 = 50 \text{ N}$ hacia la izquierda

Actividades:

1. Calcula la componente horizontal de F_1 .
2. Calcula la componente vertical de F_1 .
3. Asigna los signos correspondientes.
4. Calcula la componente horizontal resultante.
5. Calcula la componente vertical resultante.
6. Calcula la magnitud de la resultante.
7. Determina su dirección aproximada.
8. Representa el sistema mediante vectores.

Interpretación: explica cómo seno, coseno, tangente, álgebra y geometría permiten transformar un sistema de fuerzas oblicuas en información física cuantitativa.

Idea fundamental

La trigonometría permite relacionar la magnitud y dirección de una fuerza con sus componentes cartesianas. El seno y el coseno permiten descomponer vectores, mientras que la tangente ayuda a determinar su dirección a partir de componentes conocidas.

Estas herramientas permiten analizar fuerzas oblicuas, planos inclinados y sistemas de fuerzas mediante relaciones matemáticas que conservan el significado físico de los vectores.

3.5. Leyes de Newton

Relación entre fuerza, masa y aceleración

Las leyes de Newton proporcionan un marco para comprender cómo las fuerzas se relacionan con el movimiento. Permiten explicar por qué un objeto permanece en reposo, por qué cambia su velocidad cuando actúa una fuerza neta y por qué las interacciones entre cuerpos producen fuerzas mutuamente relacionadas.

Estas leyes conectan conceptos físicos como fuerza, masa y aceleración con relaciones matemáticas capaces de describir y predecir el comportamiento de los cuerpos.

3.5.1. Primera ley de Newton e inercia

La primera ley establece que un cuerpo mantiene su estado de reposo o de movimiento rectilíneo con velocidad constante cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero.

Matemáticamente:

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} = 0 \text{ N}$$

Esto implica:

$$\mathbf{a} = 0 \text{ m/s}^2$$

Una aceleración igual a cero significa que la velocidad no cambia. El objeto puede estar en reposo o moverse con velocidad constante.

La tendencia de los cuerpos a conservar su estado de movimiento se denomina **inercia**.

Ejemplo explicado

Un libro permanece sobre una mesa.

Sobre él actúa su peso hacia abajo y la fuerza normal de la mesa hacia arriba.

Si:

$$\mathbf{P} = 15 \text{ N hacia abajo}$$

y:

N = 15 N hacia arriba

entonces:

$F_{\text{neta}} = 0 \text{ N}$

El libro no experimenta aceleración vertical.

Ejercicio 1. Primera ley y fuerza neta

Situación: un objeto se desplaza horizontalmente con velocidad constante.

Datos:

Fuerza hacia la derecha: **25 N**

Fuerza hacia la izquierda: **25 N**

Velocidad: **6 m/s hacia la derecha**

Actividades:

1. Calcula la fuerza neta.
2. Determina la aceleración.
3. Indica si la velocidad debe cambiar.
4. Determina si las fuerzas están equilibradas.
5. Explica si el objeto puede continuar moviéndose aunque la fuerza neta sea cero.

Interpretación: explica por qué una fuerza neta igual a cero no significa necesariamente ausencia de movimiento.

3.5.2. Masa e inercia

La **masa** constituye una medida de la resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento.

Cuanto mayor sea la masa, mayor será la dificultad para producir una determinada aceleración mediante una misma fuerza neta.

Por ejemplo, empujar un carrito vacío y uno cargado con la misma fuerza no produce necesariamente la misma aceleración.

La masa se expresa en kilogramos:

kg

Ejercicio 2. Masa y resistencia al cambio de movimiento

Situación: sobre dos carritos se aplica la misma fuerza neta.

Datos:

Carrito A: **$m = 10 \text{ kg}$**

Carrito B: **$m = 25 \text{ kg}$**

Fuerza neta sobre ambos: **$F = 50 \text{ N}$**

Actividades:

1. Predice cuál experimentará mayor aceleración.
2. Calcula la aceleración del carrito A.
3. Calcula la aceleración del carrito B.
4. Compara los resultados.
5. Calcula cuántas veces mayor es una aceleración respecto de la otra.

Interpretación: explica cómo los resultados evidencian la relación entre masa e inercia.

3.5.3. Segunda ley de Newton

Cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza neta diferente de cero, el cuerpo experimenta una aceleración.

La relación fundamental es:

$$\mathbf{F_{neta} = ma}$$

donde:

- $\mathbf{F_{neta}}$ es la fuerza neta;
- $\mathbf{m}$ es la masa;
- $\mathbf{a}$ es la aceleración.

La aceleración posee la misma dirección y sentido que la fuerza neta.

De la expresión también pueden obtenerse:

$$\mathbf{a = F_{neta}/m}$$

y:

$$\mathbf{m = F_{neta}/a}$$

Ejemplo explicado

Sobre un objeto de 8 kg actúa una fuerza neta de 40 N.

Aceleración:

$$\mathbf{a = 40 \text{ N} \div 8 \text{ kg}}$$

$$a = 5 \text{ m/s}^2$$

Esto significa que la velocidad cambia 5 m/s durante cada segundo en la dirección de la fuerza neta.

Ejercicio 3. Aplicación de la segunda ley de Newton

Situación: una caja experimenta una fuerza neta horizontal constante.

Datos:

Masa: $m = 12 \text{ kg}$

Fuerza neta: $F_{\text{neta}} = 72 \text{ N}$ hacia la derecha

Actividades:

1. Calcula la aceleración.
2. Expresa correctamente su unidad.
3. Indica su dirección y sentido.
4. Calcula la aceleración si la fuerza aumenta a 96 N.
5. Calcula qué fuerza sería necesaria para producir una aceleración de 10 m/s^2 con la misma masa.

Interpretación: explica cómo cambia la aceleración cuando aumenta la fuerza y la masa permanece constante.

3.5.4. Proporcionalidad entre fuerza y aceleración

Si la masa permanece constante:

$$F_{\text{neta}} = ma$$

muestra que la aceleración es directamente proporcional a la fuerza neta.

Por ejemplo, para un cuerpo de 5 kg:

Fuerza neta (N)	Aceleración (m/s^2)
0	0
10	2
20	4
30	6
40	8

Al duplicarse la fuerza, se duplica la aceleración.

La relación puede expresarse:

$$a = F_{\text{neta}}/5$$

Ejercicio 4. Fuerza y aceleración

Situación: se aplica una fuerza variable sobre un cuerpo de masa constante.

Datos:

Masa: $m = 4 \text{ kg}$

Fuerzas netas: **8 N, 16 N, 24 N, 32 N y 40 N**

Actividades:

1. Calcula la aceleración correspondiente a cada fuerza.
2. Organiza los resultados en una tabla.
3. Determina la razón F/a en cada caso.
4. Identifica qué magnitud representa esa razón.
5. Describe cómo sería la gráfica aceleración-fuerza.
6. Determina qué aceleración produciría una fuerza de 60 N.

Interpretación: explica por qué la relación entre fuerza neta y aceleración es directamente proporcional cuando la masa permanece constante.

3.5.5. Relación entre masa y aceleración

Si la fuerza neta permanece constante:

$$a = F_{\text{neta}}/m$$

la aceleración disminuye cuando aumenta la masa.

Por tanto, bajo una fuerza neta constante, masa y aceleración presentan una relación inversa.

Ejemplo explicado

Si:

$$F_{\text{neta}} = 60 \text{ N}$$

para un cuerpo de 10 kg:

$$a = 6 \text{ m/s}^2$$

Para un cuerpo de 20 kg:

$$a = 3 \text{ m/s}^2$$

Al duplicarse la masa, la aceleración se reduce a la mitad.

Ejercicio 5. Masa y aceleración bajo fuerza constante

Situación: una misma fuerza neta se aplica sobre objetos de diferentes masas.

Datos:

Fuerza neta: $F_{\text{net}} = 120 \text{ N}$

Masas: 10 kg, 20 kg, 30 kg, 40 kg y 60 kg

Actividades:

1. Calcula la aceleración para cada masa.
2. Organiza los resultados en una tabla.
3. Calcula el producto ma para cada caso.
4. Comprueba que permanece constante.
5. Determina qué ocurre con la aceleración cuando la masa se duplica.
6. Describe la forma esperada de una gráfica aceleración-masa.

Interpretación: explica por qué un objeto de mayor masa experimenta menor aceleración cuando recibe la misma fuerza neta.

3.5.6. Fuerza neta a partir de varias fuerzas

La segunda ley utiliza la **fuerza neta**, no necesariamente una única fuerza.

Si sobre un objeto actúan:

$F_1 = 50 \text{ N}$ hacia la derecha

$F_2 = 20 \text{ N}$ hacia la izquierda

entonces:

$F_{\text{net}} = 30 \text{ N}$ hacia la derecha

Si la masa es:

$m = 10 \text{ kg}$

la aceleración será:

$a = 30 \text{ N} \div 10 \text{ kg}$

$a = 3 \text{ m/s}^2$ hacia la derecha

Ejercicio 6. Varias fuerzas y aceleración

Situación: dos fuerzas horizontales actúan sobre una caja.

Datos:

Masa: **$m = 15 \text{ kg}$**

Fuerza A: **90 N hacia la derecha**

Fuerza B: **30 N hacia la izquierda**

Actividades:

1. Establece un sentido positivo.
2. Calcula la fuerza neta.
3. Determina la aceleración.
4. Indica el sentido de la aceleración.
5. Calcula la aceleración si la fuerza B aumenta hasta 60 N.
6. Determina qué valor debería tener la fuerza B para producir aceleración cero.

Interpretación: explica por qué para aplicar la segunda ley es indispensable determinar primero la suma vectorial de las fuerzas.

3.5.7. Peso como fuerza gravitatoria

El **peso** es la fuerza gravitatoria que actúa sobre un cuerpo.

Cerca de la superficie terrestre puede calcularse mediante:

$$\mathbf{P = mg}$$

donde:

- **P** representa el peso;
- **m** representa la masa;
- **g** representa la aceleración gravitatoria.

Utilizando:

$$\mathbf{g = 9,8 \text{ m/s}^2}$$

un cuerpo de 5 kg posee un peso aproximado de:

$$\mathbf{P = 5 \times 9,8}$$

$$\mathbf{P = 49 \text{ N}}$$

Masa y peso no son la misma magnitud. La masa se expresa en kilogramos y el peso en newtons.

Ejercicio 7. Diferenciación entre masa y peso

Situación: se analizan varios objetos cerca de la superficie terrestre.

Datos:

Objeto A: $m = 2 \text{ kg}$

Objeto B: $m = 10 \text{ kg}$

Objeto C: $m = 25 \text{ kg}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el peso del objeto A.
2. Calcula el peso del objeto B.
3. Calcula el peso del objeto C.
4. Identifica la unidad correspondiente a la masa.
5. Identifica la unidad correspondiente al peso.
6. Determina qué ocurriría con el peso si el valor de g fuera menor.

Interpretación: explica por qué una persona conservaría aproximadamente la misma masa en otro astro, pero podría tener un peso diferente.

3.5.8. Tercera ley de Newton

La tercera ley establece que las interacciones entre dos cuerpos producen fuerzas simultáneas.

Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre B, el cuerpo B ejerce sobre A una fuerza:

- de igual magnitud;
- en la misma dirección;
- de sentido contrario.

Estas fuerzas actúan sobre **cuerpos diferentes**, por lo que no se cancelan entre sí sobre un mismo objeto.

Ejemplo explicado

Una persona empuja una pared.

La persona ejerce una fuerza sobre la pared y la pared ejerce simultáneamente una fuerza sobre la persona.

Si:

$F_{\text{persona} \rightarrow \text{pared}} = 100 \text{ N}$

entonces:

$F_{\text{pared} \rightarrow \text{persona}} = 100 \text{ N}$

en sentido contrario.

Ejercicio 8. Identificación de pares de interacción

Situación: se analizan diferentes interacciones físicas.

Datos:

- A. Una persona empuja una caja.
- B. Un nadador empuja el agua hacia atrás.
- C. Un libro ejerce fuerza sobre una mesa.
- D. Una pelota golpea una pared.

Actividades:

1. Identifica los dos cuerpos que interactúan en cada situación.
2. Describe la fuerza ejercida por el primer cuerpo sobre el segundo.
3. Describe la fuerza ejercida por el segundo sobre el primero.
4. Compara sus magnitudes.
5. Compara sus sentidos.
6. Explica por qué las dos fuerzas no deben sumarse para calcular la fuerza neta sobre un único cuerpo.

Interpretación: explica qué significa afirmar que las fuerzas de acción y reacción actúan siempre sobre cuerpos diferentes.

Actividad integradora. Fuerza, masa y movimiento

Situación: una caja se desplaza horizontalmente bajo la acción de varias fuerzas.

Datos:

Masa: **$m = 20 \text{ kg}$**

Fuerza aplicada hacia la derecha: **100 N**

Fuerza opuesta: **40 N hacia la izquierda**

Velocidad inicial: **$v_0 = 2 \text{ m/s}$ hacia la derecha**

Tiempo de actuación: **4 s**

Actividades:

1. Calcula la fuerza neta.
2. Determina la aceleración.
3. Calcula la velocidad después de 4 s .
4. Calcula el desplazamiento durante ese intervalo suponiendo aceleración constante.
5. Determina qué ocurriría con la aceleración si la masa se duplicara.
6. Determina qué fuerza opuesta produciría equilibrio.

7. Describe cómo cambiaría el movimiento si la fuerza neta se hiciera cero después de los 4 s.
8. Relaciona la situación con la primera y segunda leyes de Newton.

Interpretación: explica cómo fuerza neta, masa, aceleración y velocidad se relacionan para describir matemáticamente la evolución del movimiento.

Idea fundamental

Las leyes de Newton permiten relacionar las interacciones entre cuerpos con los cambios en su movimiento. La primera ley describe las condiciones en las que la velocidad permanece constante; la segunda establece la relación cuantitativa entre fuerza neta, masa y aceleración; y la tercera explica el carácter mutuo de las interacciones.

La relación $\mathbf{F}_{\text{neto}} = m\mathbf{a}$ convierte el análisis de fuerzas en una herramienta predictiva capaz de conectar álgebra, proporcionalidad, vectores y movimiento.

3.6. Equilibrio de cuerpos

Condiciones matemáticas necesarias para el equilibrio

Un cuerpo se encuentra en equilibrio traslacional cuando no experimenta aceleración lineal. Para que esto ocurra, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él debe ser cero.

Matemáticamente:

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

En un problema bidimensional esta condición debe cumplirse independientemente en cada eje:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

Estas expresiones constituyen las condiciones matemáticas fundamentales para analizar numerosos cuerpos en reposo o que se desplazan con velocidad constante.

3.6.1. Equilibrio en una dimensión

Consideremos un objeto sometido a dos fuerzas horizontales.

Fuerza A:

30 N hacia la derecha

Fuerza B:

30 N hacia la izquierda

Si la derecha es positiva:

$$\Sigma F_x = 30 \text{ N} - 30 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 \text{ N}$$

El sistema se encuentra en equilibrio horizontal.

Ejercicio 1. Equilibrio horizontal

Situación: varias fuerzas actúan horizontalmente sobre una caja.

Datos:

Fuerza A: **40 N hacia la derecha**

Fuerza B: **15 N hacia la derecha**

Fuerza C: **55 N hacia la izquierda**

Actividades:

1. Establece el sentido positivo.
2. Asigna signos a las fuerzas.
3. Calcula ΣF_x .
4. Determina si existe equilibrio horizontal.
5. Calcula la aceleración si la masa de la caja es 10 kg.
6. Explica qué ocurriría si la fuerza C disminuyera a 45 N.

Interpretación: explica cómo una suma algebraica permite verificar una condición física de equilibrio.

3.6.2. Equilibrio vertical

Un objeto apoyado sobre una superficie puede presentar equilibrio vertical cuando la fuerza normal equilibra su peso.

Para un objeto en reposo sobre una superficie horizontal, si no existen otras fuerzas verticales:

$$\mathbf{N} - \mathbf{P} = 0$$

Por tanto:

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}$$

Como:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$$

se obtiene:

$$N = mg$$

Ejemplo explicado

Un objeto de 10 kg reposa sobre una mesa horizontal.

Peso:

$$P = 10 \times 9,8$$

$$P = 98 \text{ N}$$

Si existe equilibrio vertical:

$$N = 98 \text{ N}$$

La mesa ejerce sobre el objeto una fuerza normal de 98 N hacia arriba.

Ejercicio 2. Fuerza normal en una superficie horizontal

Situación: una caja permanece en reposo sobre el suelo.

Datos:

Masa: $m = 25 \text{ kg}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

No actúan otras fuerzas verticales.

Actividades:

1. Calcula el peso de la caja.
2. Indica el sentido del peso.
3. Aplica la condición $\Sigma F_y = 0$.
4. Calcula la fuerza normal.
5. Representa ambas fuerzas.
6. Comprueba la fuerza neta vertical.

Interpretación: explica por qué la fuerza normal puede tener la misma magnitud que el peso en esta situación sin constituir un par de acción y reacción.

3.6.3. Equilibrio en dos dimensiones

Cuando actúan fuerzas en distintas direcciones, es necesario analizar por separado las componentes horizontales y verticales.

La condición completa de equilibrio traslacional es:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

Ambas deben cumplirse simultáneamente.

Ejemplo explicado

Sobre un objeto actúan:

20 N hacia la derecha

20 N hacia la izquierda

30 N hacia arriba

30 N hacia abajo

Entonces:

$$\Sigma F_x = 20 - 20 = 0 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 30 - 30 = 0 \text{ N}$$

El objeto se encuentra en equilibrio traslacional.

Ejercicio 3. Verificación del equilibrio en el plano

Situación: cuatro fuerzas actúan sobre un objeto.

Datos:

$F_1 = 50 \text{ N}$ hacia la derecha

$F_2 = 50 \text{ N}$ hacia la izquierda

$F_3 = 35 \text{ N}$ hacia arriba

$F_4 = 35 \text{ N}$ hacia abajo

Actividades:

1. Calcula ΣF_x .
2. Calcula ΣF_y .
3. Escribe el vector fuerza resultante.
4. Calcula su magnitud.
5. Determina si existe equilibrio.
6. Representa gráficamente el sistema.

Interpretación: explica por qué no basta comprobar el equilibrio en un solo eje.

3.6.4. Fuerza equilibrante

Si sobre un cuerpo actúa una fuerza resultante distinta de cero, puede añadirse una fuerza que produzca equilibrio.

Esta fuerza se denomina **equilibrante**.

Posee:

- la misma magnitud que la resultante;
- la misma dirección;
- sentido contrario.

Si:

$$\mathbf{R} = (30 \text{ N}, 20 \text{ N})$$

la equilibrante es:

$$\mathbf{E} = (-30 \text{ N}, -20 \text{ N})$$

Entonces:

$$\mathbf{R} + \mathbf{E} = (0 \text{ N}, 0 \text{ N})$$

Ejercicio 4. Determinación de la fuerza equilibrante

Situación: sobre un objeto actúan dos fuerzas perpendiculares.

Datos:

Fuerza horizontal: **40 N hacia la derecha**

Fuerza vertical: **30 N hacia arriba**

Actividades:

1. Escribe las componentes de la resultante.
2. Calcula la magnitud de la resultante.
3. Determina su dirección.
4. Escribe las componentes de la fuerza equilibrante.
5. Determina la magnitud de la equilibrante.
6. Indica su sentido.
7. Comprueba que la suma final es cero.

Interpretación: explica la relación geométrica y algebraica entre una resultante y su fuerza equilibrante.

3.6.5. Equilibrio con fuerzas oblicuas

Cuando una fuerza actúa oblicuamente, debe descomponerse antes de aplicar las condiciones de equilibrio.

Consideremos una fuerza:

$$F = 50 \text{ N}$$

a:

$$\theta = 30^\circ$$

Sus componentes son:

$$F_x = 50 \cos 30^\circ$$

$$F_x \approx 43,3 \text{ N}$$

$$F_y = 50 \sin 30^\circ$$

$$F_y = 25 \text{ N}$$

Estas componentes pueden incorporarse posteriormente en:

$$\Sigma F_x = 0$$

y:

$$\Sigma F_y = 0$$

Ejercicio 5. Equilibrio con una fuerza inclinada

Situación: una caja recibe una fuerza inclinada mientras otras fuerzas actúan para mantenerla en equilibrio.

Datos:

Fuerza inclinada: $F = 100 \text{ N}$

Ángulo: $\theta = 37^\circ$

Fuerza horizontal opuesta: desconocida.

Fuerza vertical opuesta: desconocida.

Actividades:

1. Calcula la componente horizontal de F.
2. Calcula la componente vertical.
3. Determina qué fuerza horizontal debe actuar en sentido contrario para cumplir $\Sigma F_x = 0$.

4. Determina qué fuerza vertical debe actuar en sentido contrario para cumplir $\Sigma F_y = 0$.
5. Representa el sistema completo.
6. Verifica ambas sumas de fuerzas.

Interpretación: explica por qué una única fuerza oblicua puede requerir dos componentes equilibrantes perpendiculares.

3.6.6. Tensión y equilibrio

Las cuerdas y cables pueden ejercer fuerzas de **tensión** a lo largo de su propia dirección.

Cuando un objeto cuelga en reposo de una cuerda vertical y se desprecia la masa de la cuerda:

$$\mathbf{T} - \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

Por tanto:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}$$

Ejemplo explicado

Una lámpara de 5 kg cuelga de una cuerda vertical.

Peso:

$$\mathbf{P} = 5 \times 9,8$$

$$\mathbf{P} = 49 \text{ N}$$

En equilibrio:

$$\mathbf{T} = 49 \text{ N}$$

Ejercicio 6. Objeto suspendido de una cuerda

Situación: una masa permanece suspendida en reposo de una cuerda vertical.

Datos:

Masa: $\mathbf{m} = 12 \text{ kg}$

Gravedad: $\mathbf{g} = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el peso.
2. Representa el peso.
3. Representa la tensión.

4. Aplica $\Sigma F_y = 0$.
5. Calcula la tensión.
6. Comprueba la fuerza neta.

Interpretación: explica por qué la tensión debe tener la misma magnitud que el peso bajo las condiciones dadas.

3.6.7. Equilibrio mediante dos cables inclinados

Cuando un objeto es sostenido por cables inclinados, cada tensión posee componentes horizontales y verticales.

En un sistema simétrico, las componentes horizontales pueden cancelarse entre sí mientras las componentes verticales sostienen el peso.

Supongamos dos cables iguales que forman el mismo ángulo θ con la horizontal y ejercen tensión T .

Cada componente vertical es:

$$T_y = T \sen \theta$$

Si el objeto se encuentra en equilibrio:

$$2T \sen \theta = P$$

Esta relación permite determinar la tensión necesaria.

Ejemplo explicado

Un objeto de peso 100 N está sostenido simétricamente por dos cables que forman 30° con la horizontal.

Condición vertical:

$$2T \sen 30^\circ = 100 \text{ N}$$

Como:

$$\sen 30^\circ = 0,5$$

tenemos:

$$2T(0,5) = 100$$

$$T = 100 \text{ N}$$

Ejercicio 7. Tensión en cables simétricos

Situación: una lámpara está sostenida por dos cables iguales colocados simétricamente.

Datos:

Peso de la lámpara: $P = 200 \text{ N}$

Ángulo de cada cable respecto de la horizontal: $\theta = 45^\circ$

Actividades:

1. Representa las dos tensiones.
2. Identifica las componentes horizontales.
3. Explica por qué se cancelan.
4. Construye la condición de equilibrio vertical.
5. Calcula la tensión en cada cable.
6. Comprueba que la suma de las componentes verticales corresponde al peso.

Interpretación: explica por qué cambiar el ángulo de los cables modifica la tensión necesaria para sostener el mismo objeto.

3.6.8. Equilibrio sobre un plano inclinado

Un cuerpo puede encontrarse en equilibrio sobre una superficie inclinada si las fuerzas paralelas y perpendiculares al plano se compensan.

El peso puede descomponerse en:

$$P_{\parallel} = mg \sin \theta$$

$$P_{\perp} = mg \cos \theta$$

Si no existe aceleración perpendicular al plano, la fuerza normal puede equilibrar la componente perpendicular del peso.

En determinadas situaciones, una fuerza adicional o la fricción puede equilibrar la componente paralela.

Ejercicio 8. Condiciones de equilibrio sobre una rampa

Situación: un bloque permanece en reposo sobre una rampa debido a una fuerza aplicada paralelamente a la superficie. Se desprecia la fricción.

Datos:

Masa: $m = 15 \text{ kg}$

Ángulo de inclinación: $\theta = 30^\circ$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el peso.
2. Calcula la componente del peso paralela al plano.
3. Calcula la componente perpendicular.
4. Determina la magnitud de la fuerza paralela necesaria para mantener el equilibrio.
5. Determina la fuerza normal.
6. Comprueba las condiciones de equilibrio en ambos ejes.

Interpretación: explica por qué el peso no debe compararse directamente con la fuerza aplicada paralelamente a la rampa.

3.6.9. Equilibrio y velocidad constante

La condición:

$$\Sigma F = 0$$

implica:

$$a = 0$$

pero no necesariamente:

$$v = 0$$

Por tanto, existen dos posibilidades:

- cuerpo en reposo;
- cuerpo desplazándose con velocidad constante.

Este resultado conecta directamente las condiciones de equilibrio con la primera ley de Newton.

Ejercicio 9. Equilibrio dinámico

Situación: un objeto se desplaza horizontalmente con velocidad constante mientras varias fuerzas actúan sobre él.

Datos:

Velocidad: **$v = 5 \text{ m/s}$ hacia la derecha**

Fuerza aplicada: **40 N hacia la derecha**

Fuerza opuesta: **40 N hacia la izquierda**

Actividades:

1. Calcula la fuerza neta.
2. Determina la aceleración.
3. Indica si la velocidad cambia.
4. Determina la velocidad después de 10 s si las condiciones permanecen iguales.

5. Explica si el cuerpo se encuentra en equilibrio traslacional.

Interpretación: explica la diferencia entre equilibrio y reposo.

3.6.10. Condición adicional para cuerpos extensos

Cuando se estudia un cuerpo que puede rotar, no basta con exigir que la suma de fuerzas sea cero. También es necesario analizar la tendencia de las fuerzas a producir rotación.

Esta tendencia se relaciona con el **momento de una fuerza** o **torque**, que será desarrollado con mayor profundidad cuando corresponda estudiar rotación.

Para un equilibrio completo de un cuerpo rígido deben cumplirse:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

y además:

$$\Sigma \tau = 0$$

Las dos primeras condiciones evitan aceleraciones de traslación; la tercera evita aceleración angular.

Ejercicio 10. Reconocimiento de condiciones de equilibrio

Situación: se analizan diferentes cuerpos sometidos a fuerzas.

Datos:

- A. Una caja en reposo sobre el suelo.
- B. Una lámpara suspendida mediante cables.
- C. Una barra horizontal sostenida en sus extremos.
- D. Un automóvil moviéndose en línea recta con velocidad constante.

Actividades:

1. Identifica cuáles requieren analizar fuerzas horizontales.
2. Identifica cuáles requieren analizar fuerzas verticales.
3. Determina en qué situación puede ser especialmente importante analizar también la tendencia a rotar.
4. Escribe las condiciones de equilibrio traslacional.
5. Escribe la condición adicional necesaria para un cuerpo rígido en equilibrio completo.

Interpretación: explica por qué un cuerpo puede tener fuerza resultante igual a cero y, sin embargo, requerir un análisis adicional para determinar si puede comenzar a girar.

Actividad integradora. Equilibrio de un sistema de fuerzas

Situación: un objeto de 20 kg permanece suspendido mediante dos cables simétricos que forman 40° con la horizontal.

Datos:

Masa: $m = 20 \text{ kg}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Ángulo de cada cable: $\theta = 40^\circ$

Sistema en reposo.

Actividades:

1. Calcula el peso del objeto.
2. Representa las dos tensiones y el peso.
3. Descompón cada tensión en componentes horizontal y vertical.
4. Explica por qué las componentes horizontales se cancelan.
5. Construye la condición $\Sigma F_y = 0$.
6. Calcula la tensión en cada cable.
7. Comprueba la suma de las componentes verticales.
8. Determina qué ocurriría con la tensión si los cables se colocaran más próximos a la horizontal.
9. Determina qué ocurriría si los cables se aproximaran a la vertical.
10. Explica cómo intervienen seno, vectores y ecuaciones de equilibrio en la solución.

Interpretación: explica cómo un problema de equilibrio integra representación vectorial, trigonometría, álgebra y leyes de Newton para describir cuantitativamente una situación física.

Idea fundamental

El equilibrio de un cuerpo se establece mediante condiciones matemáticas precisas. Para que no exista aceleración traslacional, la suma vectorial de las fuerzas debe ser cero.

En el plano, esto exige simultáneamente:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

Cuando además se estudian cuerpos capaces de rotar, debe incorporarse la condición de equilibrio de momentos.

El equilibrio constituye así una aplicación directa de las leyes de Newton y del cálculo vectorial, y muestra cómo fuerzas, componentes, trigonometría y ecuaciones algebraicas pueden integrarse para describir sistemas físicos reales.

3.7. Fuerzas presentes en situaciones reales

Peso, normal, tensión, rozamiento y fuerza elástica

En una situación cotidiana, un cuerpo rara vez está sometido a una única fuerza. Un libro apoyado sobre una mesa experimenta la acción de la gravedad y la interacción con la superficie; una caja arrastrada por el suelo puede estar sometida al peso, la fuerza normal, una fuerza aplicada y el rozamiento; un objeto suspendido de una cuerda experimenta además una tensión.

Identificar correctamente estas fuerzas constituye un paso fundamental antes de aplicar las leyes de Newton. Cada fuerza tiene un **origen físico**, una dirección y un sentido determinados. Por ello, no debe incorporarse una fuerza a un problema solamente porque aparezca habitualmente en otros ejercicios: es necesario justificar qué interacción la produce.

3.7.1. El peso

El **peso** es la fuerza gravitatoria que un astro ejerce sobre un cuerpo. Cerca de la superficie terrestre, su magnitud puede calcularse mediante:

$$P = mg$$

donde P es el peso, m es la masa y g representa la aceleración gravitatoria.

En la superficie terrestre puede utilizarse aproximadamente:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

La dirección del peso es vertical y su sentido apunta hacia el centro de la Tierra.

Ejemplo explicado

Para un objeto de masa:

$$m = 8 \text{ kg}$$

el peso es:

$$P = 8 \times 9,8$$

$$P = 78,4 \text{ N}$$

La masa continúa siendo 8 kg, mientras que 78,4 N representa la fuerza gravitatoria que actúa sobre el objeto.

Ejercicio 1. Cálculo e interpretación del peso

Situación: varios objetos se encuentran cerca de la superficie terrestre.

Datos:

Objeto A: **$m = 2 \text{ kg}$**

Objeto B: **$m = 5 \text{ kg}$**

Objeto C: **$m = 12 \text{ kg}$**

Gravedad: **$g = 9,8 \text{ m/s}^2$**

Actividades:

1. Calcula el peso del objeto A.
2. Calcula el peso del objeto B.
3. Calcula el peso del objeto C.
4. Ordena los objetos de menor a mayor peso.
5. Compara la relación entre masa y peso.
6. Indica la dirección y el sentido de la fuerza peso.

Interpretación: explica por qué masa y peso son magnitudes diferentes aunque estén relacionadas matemáticamente.

3.7.2. La fuerza normal

Cuando un cuerpo está en contacto con una superficie, esta puede ejercer sobre él una **fuerza normal**. Se denomina normal porque actúa perpendicularmente a la superficie de contacto.

En una superficie horizontal, la normal suele dirigirse verticalmente hacia arriba. En una superficie inclinada, también es perpendicular a la superficie, por lo que no necesariamente es vertical.

La fuerza normal no posee siempre la misma magnitud que el peso. Esa igualdad ocurre solamente bajo determinadas condiciones.

Ejemplo explicado

Una caja de 10 kg permanece en reposo sobre una mesa horizontal sin otras fuerzas verticales.

Peso:

$$P = 10 \times 9,8$$

$$P = 98 \text{ N}$$

Como no existe aceleración vertical:

$$N - P = 0$$

Por tanto:

$$N = 98 \text{ N}$$

Si una persona empujara adicionalmente la caja hacia abajo, la normal tendría que aumentar para mantener el equilibrio vertical.

Ejercicio 2. Determinación de la fuerza normal

Situación: una caja permanece en reposo sobre una superficie horizontal.

Datos:

Masa: $m = 15 \text{ kg}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Fuerza adicional hacia abajo: $F = 30 \text{ N}$

Actividades:

1. Calcula el peso de la caja.
2. Identifica todas las fuerzas verticales.
3. Escribe la condición de equilibrio vertical.
4. Calcula la fuerza normal.
5. Compara la normal con el peso.
6. Explica por qué en este caso sus magnitudes no son iguales.

Interpretación: explica por qué la fuerza normal depende de las interacciones que actúan perpendicularmente a la superficie.

3.7.3. Normal sobre un plano inclinado

En una superficie inclinada, el peso puede descomponerse en una componente paralela y otra perpendicular al plano.

La componente perpendicular es:

$$P_{\perp} = mg \cos \theta$$

Si no existe aceleración perpendicular a la superficie y no actúan otras fuerzas en esa dirección:

$$N = mg \cos \theta$$

Esto muestra que, en una rampa, la normal generalmente es menor que el peso.

Ejemplo explicado

Un bloque de 20 kg está sobre una rampa de 30° .

Peso:

$$P = 20 \times 9,8$$

$$P = 196 \text{ N}$$

Componente perpendicular:

$$P_{\perp} = 196 \cos 30^{\circ}$$

$$P_{\perp} \approx 169,7 \text{ N}$$

Por tanto, bajo las condiciones indicadas:

$$N \approx 169,7 \text{ N}$$

Ejercicio 3. Fuerza normal sobre una rampa

Situación: un bloque se encuentra sobre una superficie inclinada y no experimenta aceleración perpendicular al plano.

Datos:

Masa: $m = 12 \text{ kg}$

Ángulo: $\theta = 35^{\circ}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el peso.
2. Calcula la componente del peso perpendicular a la superficie.
3. Calcula la fuerza normal.
4. Calcula la componente del peso paralela al plano.
5. Compara la normal con el peso total.
6. Explica qué ocurriría con la normal si aumentara el ángulo de inclinación.

Interpretación: explica por qué la normal no debe confundirse con el peso cuando el objeto se encuentra sobre un plano inclinado.

3.7.4. La tensión

La **tensión** es una fuerza transmitida mediante una cuerda, cable o elemento flexible idealizado cuando se encuentra estirado.

La tensión actúa siguiendo la dirección de la cuerda y tira del cuerpo al que está unida.

En una cuerda ideal de masa despreciable, bajo determinadas condiciones, puede considerarse que la magnitud de la tensión es la misma a lo largo de toda la cuerda.

Ejemplo explicado

Una lámpara de 6 kg cuelga en reposo de una cuerda vertical.

Peso:

$$P = 6 \times 9,8$$

$$P = 58,8 \text{ N}$$

Como está en equilibrio:

$$T - P = 0$$

Por tanto:

$$T = 58,8 \text{ N}$$

Ejercicio 4. Tensión en una cuerda vertical

Situación: un objeto permanece suspendido en reposo mediante una cuerda vertical.

Datos:

Masa: $m = 18 \text{ kg}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el peso.
2. Identifica la dirección de la tensión.
3. Escribe la condición de equilibrio vertical.
4. Calcula la tensión.
5. Indica la unidad correspondiente.
6. Explica qué ocurriría con la tensión si el objeto tuviera mayor masa.

Interpretación: explica por qué la tensión y el peso tienen sentidos contrarios en esta situación.

3.7.5. Tensión cuando existe aceleración

La tensión no siempre es igual al peso. Si un objeto suspendido acelera verticalmente, la fuerza neta deja de ser cero.

Si el sentido positivo es hacia arriba:

$$T - mg = ma$$

Si el objeto acelera hacia arriba, la tensión será mayor que el peso.

Si acelera hacia abajo con una magnitud menor que g , la tensión será menor que el peso.

Ejemplo explicado

Un objeto de 5 kg acelera hacia arriba a 2 m/s^2 .

Peso:

$$P = 49 \text{ N}$$

Aplicamos:

$$T - 49 = 5(2)$$

$$T = 59 \text{ N}$$

La tensión es mayor que el peso porque se necesita una fuerza resultante hacia arriba.

Ejercicio 5. Tensión en un movimiento acelerado

Situación: una carga es elevada verticalmente mediante un cable.

Datos:

Masa: $m = 10 \text{ kg}$

Aceleración hacia arriba: $a = 1,5 \text{ m/s}^2$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el peso.
2. Escribe la segunda ley de Newton para el eje vertical.
3. Calcula la tensión.
4. Compara la tensión con el peso.
5. Calcula la tensión si la carga ascendiera con velocidad constante.
6. Explica la diferencia entre ambos resultados.

Interpretación: explica por qué el movimiento hacia arriba no implica necesariamente que la tensión sea mayor que el peso; lo determinante es la aceleración.

3.7.6. Fuerza de rozamiento

Cuando dos superficies están en contacto, puede aparecer una fuerza que se opone al deslizamiento o a la tendencia de deslizamiento entre ellas. Esta interacción se denomina **fuerza de rozamiento** o fricción.

Se distinguen principalmente:

- rozamiento estático;

- rozamiento cinético.

El **rozamiento estático** actúa cuando las superficies no deslizan entre sí. Su valor se ajusta hasta un máximo.

El **rozamiento cinético** actúa cuando existe deslizamiento.

En un modelo sencillo:

$$f_k = \mu_k N$$

donde:

- f_k es la fuerza de rozamiento cinético;
- μ_k es el coeficiente de rozamiento cinético;
- N es la fuerza normal.

Ejemplo explicado

Una caja se desliza sobre una superficie horizontal.

Normal:

$$N = 100 \text{ N}$$

Coeficiente de rozamiento cinético:

$$\mu_k = 0,20$$

Entonces:

$$f_k = 0,20 \times 100$$

$$f_k = 20 \text{ N}$$

La fuerza actúa en sentido contrario al deslizamiento relativo.

Ejercicio 6. Rozamiento cinético sobre una superficie horizontal

Situación: una caja se desliza horizontalmente sobre el suelo.

Datos:

Masa: $m = 20 \text{ kg}$

Coeficiente de rozamiento cinético: $\mu_k = 0,25$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

No actúan otras fuerzas verticales.

Actividades:

1. Calcula el peso.
2. Calcula la fuerza normal.
3. Calcula la fuerza de rozamiento cinético.
4. Determina su dirección.
5. Determina su sentido si la caja se desplaza hacia la derecha.
6. Calcula qué valor tendría el rozamiento si el coeficiente disminuyera a 0,15.

Interpretación: explica cómo influyen la normal y el coeficiente de rozamiento en la magnitud de la fuerza de fricción.

3.7.7. Rozamiento estático

El rozamiento estático no posee siempre el valor:

$$\mu_s N$$

Ese producto representa su **valor máximo**:

$$f_s \leq \mu_s N$$

Si una persona intenta empujar una caja con una fuerza pequeña y esta no se mueve, el rozamiento estático puede adoptar una magnitud igual y opuesta a la fuerza aplicada.

Solo cuando la fuerza requerida supera el máximo rozamiento estático puede comenzar el deslizamiento.

Ejemplo explicado

Una caja permanece inmóvil.

Fuerza aplicada:

20 N hacia la derecha

Si el máximo rozamiento estático disponible es 35 N, el rozamiento necesario para mantener el equilibrio será:

20 N hacia la izquierda

y no 35 N.

Ejercicio 7. Análisis del rozamiento estático

Situación: una caja permanece inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal.

Datos:

Masa: **m = 10 kg**

Coeficiente de rozamiento estático: $\mu_s = 0,40$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Fuerza aplicada horizontal: $F = 25 \text{ N}$

Actividades:

1. Calcula la fuerza normal.
2. Calcula el máximo rozamiento estático.
3. Compara la fuerza aplicada con dicho máximo.
4. Determina si la caja comienza a deslizarse.
5. Determina la magnitud del rozamiento estático mientras permanece en reposo.
6. Indica el sentido del rozamiento.

Interpretación: explica por qué el rozamiento estático no debe calcularse automáticamente como $\mu_s N$ en todas las situaciones.

3.7.8. Fuerza elástica

Cuando un resorte se estira o comprime dentro de su límite elástico, ejerce una fuerza que tiende a recuperar su longitud de equilibrio.

El modelo más sencillo se expresa mediante la **ley de Hooke**:

$$F_e = -kx$$

donde:

- F_e representa la fuerza elástica;
- k es la constante elástica del resorte;
- x representa la deformación respecto de la posición de equilibrio.

El signo negativo indica que la fuerza elástica actúa en sentido opuesto a la deformación.

Ejemplo explicado

Un resorte posee:

$$k = 200 \text{ N/m}$$

y se estira:

$$x = 0,05 \text{ m}$$

La magnitud de la fuerza elástica es:

$$|F_e| = 200 \times 0,05$$

$$|F_e| = 10 \text{ N}$$

Si el estiramiento ocurre hacia la derecha, la fuerza del resorte actúa hacia la izquierda.

Ejercicio 8. Fuerza elástica y deformación

Situación: un resorte se estira desde su posición de equilibrio.

Datos:

Constante elástica: $k = 150 \text{ N/m}$

Deformación: $x = 0,08 \text{ m}$

Actividades:

1. Calcula la magnitud de la fuerza elástica.
2. Indica su unidad.
3. Determina el sentido de la fuerza si el resorte se estira hacia la derecha.
4. Calcula la fuerza para una deformación de $0,12 \text{ m}$.
5. Compara ambas fuerzas.
6. Determina qué deformación produciría una fuerza elástica de magnitud 30 N .

Interpretación: explica qué significa físicamente el signo negativo de la ley de Hooke.

3.7.9. Comparación de fuerzas frecuentes

Cada fuerza posee un origen diferente:

Fuerza	Origen	Dirección característica
Peso	Interacción gravitatoria	Vertical hacia el centro terrestre
Normal	Contacto con una superficie	Perpendicular a la superficie
Tensión	Cuerda o cable estirado	A lo largo de la cuerda
Rozamiento	Contacto entre superficies	Paralela a la superficie
Elástica	Deformación de un resorte	Opuesta a la deformación

Reconocer el origen de cada fuerza ayuda a evitar errores frecuentes, como dibujar una normal cuando no existe una superficie de contacto o incorporar rozamiento sin justificarlo.

Ejercicio 9. Identificación de fuerzas en contextos reales

Situación: analiza las siguientes situaciones.

Datos:

- A. Un libro permanece sobre una mesa.
- B. Una lámpara cuelga de una cuerda.
- C. Una caja se desliza por el suelo.

D. Un bloque está unido a un resorte horizontal.

E. Un objeto cae sin contacto con otras superficies y se desprecia el aire.

Actividades:

1. Identifica las fuerzas que actúan sobre el cuerpo principal en cada situación.
2. Indica el origen físico de cada fuerza.
3. Determina la dirección de cada una.
4. Determina su sentido.
5. Identifica en qué situaciones aparece una fuerza de contacto.
6. Identifica cuál situación puede modelizarse únicamente con el peso.

Interpretación: explica por qué identificar correctamente las interacciones debe realizarse antes de escribir ecuaciones.

Actividad integradora. Una caja sometida a diferentes fuerzas

Situación: una caja se desplaza hacia la derecha sobre una superficie horizontal mientras una persona hala de ella mediante una cuerda inclinada.

Datos:

Masa: $m = 25 \text{ kg}$

Fuerza de tensión: $T = 120 \text{ N}$

Ángulo de la cuerda: $\theta = 30^\circ$

Coeficiente de rozamiento cinético: $\mu_k = 0,20$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el peso.
2. Descompón la tensión en componentes horizontal y vertical.
3. Determina la fuerza normal considerando la componente vertical de la tensión.
4. Calcula la fuerza de rozamiento cinético.
5. Calcula la fuerza neta horizontal.
6. Determina la aceleración de la caja.
7. Explica qué ocurriría con la normal si aumentara la componente vertical de la tensión.
8. Explica cómo ese cambio modificaría el rozamiento.

Interpretación: explica cómo peso, normal, tensión y rozamiento se relacionan entre sí dentro de una misma situación y por qué las fuerzas no deben analizarse aisladamente.

Idea fundamental

Las fuerzas que aparecen en situaciones reales poseen orígenes físicos diferentes. El peso surge de la interacción gravitatoria; la normal y el rozamiento aparecen por contacto con superficies; la tensión se transmite mediante cuerdas o cables; y la fuerza elástica surge cuando un cuerpo deformable tiende a recuperar su configuración de equilibrio.

Identificarlas correctamente permite construir modelos físicos coherentes y constituye el paso previo para aplicar las leyes de Newton.

3.8. Resolución de problemas mediante diagramas de cuerpo libre

Un **diagrama de cuerpo libre** es una representación simplificada en la que se aísla el cuerpo que se desea estudiar y se muestran únicamente las fuerzas externas que actúan directamente sobre él.

Su finalidad no es reproducir visualmente toda la situación, sino transformar un problema físico en una representación vectorial que facilite la construcción de ecuaciones.

Un buen diagrama de cuerpo libre permite responder tres preguntas esenciales:

¿Qué cuerpo estoy analizando?

¿Qué otros cuerpos interactúan directamente con él?

¿Qué fuerza produce cada interacción?

3.8.1. Aislar el cuerpo de interés

El primer paso consiste en seleccionar el cuerpo que será analizado.

Supongamos una caja apoyada sobre una mesa.

Para construir su diagrama no es necesario dibujar la mesa completa, el suelo o el entorno. La caja puede representarse mediante un punto o un bloque sencillo.

Posteriormente se incorporan únicamente las fuerzas que actúan **sobre la caja**:

- peso hacia abajo;
- normal hacia arriba.

No deben incluirse en el mismo diagrama las fuerzas que la caja ejerce sobre otros cuerpos.

Ejemplo explicado

Para una caja en reposo sobre una mesa horizontal:

Peso:

$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, hacia abajo.

Normal:

N, hacia arriba.

Si permanece en equilibrio:

$$\mathbf{N} - \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

Ejercicio 1. Construcción de un diagrama básico

Situación: un libro permanece en reposo sobre una mesa horizontal.

Datos:

Masa del libro: **m = 3 kg**

Gravedad: **g = 9,8 m/s²**

Actividades:

1. Identifica el cuerpo que debe aislarse.
2. Identifica las interacciones que actúan directamente sobre él.
3. Dibuja la fuerza peso.
4. Dibuja la fuerza normal.
5. Calcula el peso.
6. Utiliza el equilibrio vertical para determinar la normal.

Interpretación: explica por qué la fuerza que el libro ejerce sobre la mesa no debe incluirse en el diagrama de cuerpo libre del libro.

3.8.2. Identificar fuerzas a partir de interacciones

Una estrategia útil consiste en identificar primero las interacciones y después asignar las fuerzas.

Si un cuerpo interactúa con:

- la Tierra, aparece el peso;
- una superficie, puede aparecer la normal y, si corresponde, rozamiento;
- una cuerda, puede aparecer tensión;
- un resorte, puede aparecer fuerza elástica.

Esto evita incorporar fuerzas inexistentes.

Ejercicio 2. De las interacciones al diagrama

Situación: una caja es arrastrada sobre el suelo mediante una cuerda horizontal y existe rozamiento.

Datos:

La caja interactúa con la Tierra, el suelo y la cuerda.

Movimiento hacia la derecha.

Actividades:

1. Identifica la fuerza asociada con la Tierra.
2. Identifica las fuerzas asociadas con el suelo.
3. Identifica la fuerza asociada con la cuerda.
4. Determina la dirección y el sentido de cada fuerza.
5. Construye el diagrama de cuerpo libre.
6. Clasifica las fuerzas en horizontales y verticales.

Interpretación: explica cómo utilizar las interacciones reduce el riesgo de olvidar fuerzas o incorporar fuerzas que no actúan sobre el cuerpo.

3.8.3. Elección de ejes

Después de identificar las fuerzas se establece un sistema de coordenadas adecuado.

En una superficie horizontal suele resultar conveniente elegir:

- eje x horizontal;
- eje y vertical.

En un plano inclinado puede ser más útil utilizar:

- eje x paralelo a la superficie;
- eje y perpendicular a la superficie.

La elección de los ejes no modifica las fuerzas reales; facilita su representación matemática.

Ejemplo explicado

Una caja está sobre una rampa de ángulo θ .

El peso es vertical, pero puede descomponerse en:

$$P_{\parallel} = mg \sin \theta$$

$$P_{\perp} = mg \cos \theta$$

De esta manera, las ecuaciones pueden escribirse directamente en los ejes elegidos.

Ejercicio 3. Selección del sistema de ejes

Situación: un bloque se encuentra sobre una rampa inclinada 30° respecto de la horizontal.

Datos:

Masa: $m = 10 \text{ kg}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Se desprecia inicialmente el rozamiento.

Actividades:

1. Selecciona ejes paralelos y perpendiculares a la rampa.
2. Representa el peso.
3. Descompón el peso en ambos ejes.
4. Representa la normal.
5. Identifica qué componente del peso puede producir movimiento sobre la rampa.
6. Construye el diagrama de cuerpo libre.

Interpretación: explica por qué esta elección de ejes simplifica las ecuaciones en comparación con utilizar ejes horizontal y vertical.

3.8.4. Del diagrama a las ecuaciones

Una vez construido el diagrama, las fuerzas se agrupan por componentes.

La segunda ley de Newton se aplica independientemente en cada eje:

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

Si no existe aceleración en un eje, la suma de fuerzas en ese eje es cero.

Ejemplo explicado

Una caja de masa 10 kg recibe:

50 N hacia la derecha

y experimenta:

20 N de rozamiento hacia la izquierda

Horizontalmente:

$$\Sigma F_x = 50 - 20$$

$$\Sigma F_x = 30 \text{ N}$$

Entonces:

$$a_x = 30 \div 10$$

$$a_x = 3 \text{ m/s}^2$$

Verticalmente, si no existe aceleración:

$$N - mg = 0$$

Ejercicio 4. Del diagrama a la aceleración

Situación: una caja es empujada horizontalmente sobre una superficie rugosa.

Datos:

Masa: $m = 15 \text{ kg}$

Fuerza aplicada: $F = 90 \text{ N}$ hacia la derecha

Rozamiento: $f = 30 \text{ N}$ hacia la izquierda

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Construye el diagrama de cuerpo libre.
2. Identifica las fuerzas horizontales.
3. Identifica las fuerzas verticales.
4. Calcula la fuerza neta horizontal.
5. Calcula la aceleración.
6. Calcula el peso.
7. Determina la normal.

Interpretación: explica cómo el diagrama permite separar el equilibrio vertical del movimiento acelerado horizontal.

3.8.5. Diagramas con una fuerza inclinada

Cuando una fuerza es oblicua respecto de los ejes elegidos, debe descomponerse antes de escribir las ecuaciones.

Consideremos una fuerza aplicada:

$$F = 100 \text{ N}$$

a:

$$\theta = 30^\circ$$

Sus componentes son:

$$F_x = 100 \cos 30^\circ$$

$$F_y = 100 \sin 30^\circ$$

Si la fuerza apunta hacia arriba, su componente vertical puede reducir la normal.

Ejemplo explicado

Una caja es halada hacia arriba y hacia la derecha.

Verticalmente:

$$N + F_y - mg = 0$$

Por tanto:

$$N = mg - F_y$$

Esta reducción de la normal puede disminuir también la fuerza de rozamiento.

Ejercicio 5. Diagrama con una tensión inclinada

Situación: una caja se hala mediante una cuerda inclinada mientras se desplaza sobre una superficie rugosa.

Datos:

Masa: $m = 20 \text{ kg}$

Tensión: $T = 100 \text{ N}$

Ángulo: $\theta = 30^\circ$

Coefficiente de rozamiento cinético: $\mu_k = 0,20$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Construye el diagrama de cuerpo libre.
2. Descompón la tensión.
3. Calcula el peso.
4. Aplica la ecuación vertical para calcular la normal.
5. Calcula el rozamiento cinético.
6. Calcula la fuerza neta horizontal.
7. Determina la aceleración.

Interpretación: explica cómo la inclinación de la cuerda puede modificar indirectamente la aceleración al cambiar la fuerza normal y el rozamiento.

3.8.6. Diagramas de objetos suspendidos

En sistemas suspendidos, las fuerzas más frecuentes son el peso y la tensión.

Si un objeto está en equilibrio:

$$T - mg = 0$$

Si acelera:

$$T - mg = ma$$

cuando se toma hacia arriba como sentido positivo.

Ejercicio 6. Diagrama de una carga suspendida

Situación: una carga es elevada verticalmente mediante un cable.

Datos:

Masa: $m = 30 \text{ kg}$

Aceleración hacia arriba: $a = 2 \text{ m/s}^2$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Aísla la carga.
2. Construye el diagrama de cuerpo libre.
3. Representa el peso.
4. Representa la tensión.
5. Escribe la ecuación de la segunda ley.
6. Calcula la tensión.
7. Compara la tensión con el peso.

Interpretación: explica qué cambio debería realizarse en la ecuación si la aceleración fuera hacia abajo.

3.8.7. Diagramas sobre planos inclinados

Un bloque situado sobre una rampa puede estar sometido a peso, normal, rozamiento, tensión u otras fuerzas.

El peso debe representarse siempre verticalmente hacia abajo. No debe dibujarse directamente paralelo al plano.

Posteriormente puede descomponerse en:

$$P_{\parallel} = mg \sin \theta$$

$$P_{\perp} = mg \cos \theta$$

Ejercicio 7. Movimiento sobre un plano inclinado sin rozamiento

Situación: un bloque se desliza libremente hacia abajo por una rampa y se desprecia el rozamiento.

Datos:

Masa: $m = 8 \text{ kg}$

Ángulo: $\theta = 25^\circ$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Construye el diagrama de cuerpo libre.
2. Representa correctamente el peso.
3. Calcula la componente paralela del peso.
4. Calcula la componente perpendicular.
5. Calcula la fuerza normal.
6. Calcula la fuerza neta paralela al plano.
7. Determina la aceleración del bloque.

Interpretación: explica por qué la masa se cancela al calcular la aceleración del bloque en un plano inclinado ideal sin rozamiento.

3.8.8. Plano inclinado con rozamiento

Si existe rozamiento, este actúa paralelo a la superficie y en sentido contrario al movimiento o a la tendencia de movimiento.

La fuerza de rozamiento cinético puede calcularse mediante:

$$f_k = \mu_k N$$

En una rampa sin otras fuerzas perpendiculares:

$$N = mg \cos \theta$$

Por tanto, el análisis integra trigonometría, fuerzas de contacto y segunda ley de Newton.

Ejercicio 8. Diagrama sobre una rampa con rozamiento

Situación: un bloque se desliza hacia abajo por una superficie inclinada rugosa.

Datos:

Masa: $m = 12 \text{ kg}$

Ángulo: $\theta = 30^\circ$

Coeficiente de rozamiento cinético: $\mu_k = 0,20$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Construye el diagrama de cuerpo libre.
2. Calcula la componente paralela del peso.
3. Calcula la componente perpendicular.
4. Calcula la normal.
5. Calcula la fuerza de rozamiento.
6. Determina la fuerza neta paralela al plano.
7. Calcula la aceleración.

Interpretación: explica cómo el rozamiento modifica la aceleración respecto del caso ideal sin fricción.

3.8.9. Fuerza elástica en un diagrama de cuerpo libre

Cuando un cuerpo está unido a un resorte, debe representarse la fuerza elástica si el resorte está deformado.

Su magnitud depende de la deformación:

$$|F_e| = k|x|$$

y su sentido apunta hacia la posición de equilibrio.

Ejemplo explicado

Una caja sobre una superficie horizontal está unida a un resorte estirado hacia la derecha.

Si el resorte está fijado a la izquierda, la fuerza elástica sobre la caja apunta hacia la izquierda.

El diagrama puede incluir además peso, normal y rozamiento si existe.

Ejercicio 9. Diagrama de un cuerpo unido a un resorte

Situación: una caja se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento y está unida a un resorte.

Datos:

Masa: $m = 4 \text{ kg}$

Constante elástica: $k = 120 \text{ N/m}$

Deformación hacia la derecha: $x = 0,10 \text{ m}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Construye el diagrama de cuerpo libre.
2. Calcula el peso.
3. Calcula la normal.
4. Calcula la magnitud de la fuerza elástica.
5. Determina el sentido de la fuerza elástica.
6. Calcula la fuerza neta horizontal.
7. Determina la aceleración inicial.

Interpretación: explica por qué la fuerza del resorte apunta hacia la posición de equilibrio y no en el mismo sentido de la deformación.

3.8.10. Errores frecuentes en los diagramas de cuerpo libre

Un diagrama incorrecto conduce con frecuencia a ecuaciones incorrectas. Entre los errores más comunes se encuentran:

- representar fuerzas que el cuerpo ejerce sobre otros objetos;
- olvidar el peso;
- dibujar la normal siempre vertical;
- asumir que normal y peso son siempre iguales;
- dibujar el rozamiento siempre opuesto a una fuerza aplicada en lugar de analizar el movimiento relativo;
- representar las componentes de una fuerza y mantener simultáneamente la fuerza original en la misma suma;
- confundir velocidad con fuerza;
- dibujar una “fuerza de movimiento” que no corresponde a ninguna interacción real.

Una regla fundamental es que **cada flecha del diagrama debe corresponder a una interacción física identificable.**

Ejercicio 10. Detección de errores en un diagrama

Situación: un estudiante analiza una caja que se desliza hacia la derecha sobre una superficie horizontal rugosa y propone las siguientes fuerzas:

Datos:

Peso hacia abajo.

Normal hacia arriba.

Fuerza aplicada hacia la derecha.

Rozamiento hacia la izquierda.

“Fuerza de movimiento” hacia la derecha.

Actividades:

1. Identifica las fuerzas físicamente justificadas.
2. Identifica la fuerza que no corresponde a una interacción real.

3. Explica por qué debe eliminarse.
4. Determina qué interacción origina cada una de las fuerzas correctas.
5. Construye el diagrama corregido.
6. Explica qué información adicional sería necesaria para calcular la aceleración.

Interpretación: explica por qué el diagrama de cuerpo libre debe construirse a partir de interacciones y no de la intuición de que “si algo se mueve debe existir una fuerza hacia adelante”.

Actividad integradora. Del contexto al diagrama y del diagrama a la solución

Situación: una caja se desplaza hacia arriba por una rampa debido a una cuerda paralela a la superficie. Existe rozamiento cinético.

Datos:

Masa: $m = 18 \text{ kg}$

Ángulo de la rampa: $\theta = 30^\circ$

Tensión: $T = 140 \text{ N}$

Coeficiente de rozamiento cinético: $\mu_k = 0,15$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Movimiento: hacia arriba por la rampa.

Actividades:

1. Aísla la caja.
2. Selecciona ejes paralelos y perpendiculares a la rampa.
3. Identifica todas las interacciones.
4. Construye el diagrama de cuerpo libre.
5. Descompón el peso.
6. Calcula la fuerza normal.
7. Calcula el rozamiento cinético.
8. Determina el sentido del rozamiento.
9. Construye la ecuación de fuerzas paralelas al plano.
10. Calcula la fuerza neta.
11. Determina la aceleración.
12. Analiza el signo de la aceleración respecto del sentido del movimiento.
13. Explica qué ocurriría si la tensión disminuyera progresivamente.

Interpretación: explica cómo el diagrama de cuerpo libre permite transformar una situación real en un modelo matemático y cómo la elección de ejes, la trigonometría y la segunda ley de Newton se integran para obtener e interpretar la solución.

Idea fundamental

El diagrama de cuerpo libre constituye un puente entre la situación física y las ecuaciones matemáticas. Su construcción exige aislar el cuerpo, identificar las interacciones, representar las fuerzas, elegir un sistema de referencia y descomponer los vectores cuando sea necesario.

A partir del diagrama, las leyes de Newton pueden aplicarse por componentes. De esta manera, situaciones que inicialmente parecen complejas pueden convertirse en sistemas de ecuaciones organizados y físicamente interpretables.

CAPÍTULO 4. ENERGÍA, TRABAJO, POTENCIA Y MODELOS DE CONSERVACIÓN

4.1. Trabajo mecánico y relaciones matemáticas

Fuerza, desplazamiento, ángulo y trabajo realizado

En muchas situaciones cotidianas se aplican fuerzas sobre objetos y estos experimentan desplazamientos. Empujar un carrito, levantar una mochila, arrastrar una caja o comprimir un resorte son ejemplos en los que una fuerza puede transferir energía mediante un desplazamiento.

En Física, el **trabajo mecánico** describe la transferencia de energía que ocurre cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo y produce un desplazamiento. No basta con que exista una fuerza: para que haya trabajo mecánico debe existir también un desplazamiento y una componente de la fuerza en la dirección de ese desplazamiento.

El trabajo puede expresarse mediante:

$$W = Fd \cos \theta$$

donde:

- W es el trabajo;
- F es la magnitud de la fuerza;
- d es la magnitud del desplazamiento;
- θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.

En el Sistema Internacional, el trabajo se expresa en **joules**, cuyo símbolo es **J**.

Un joule equivale a:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.1.1. Trabajo cuando fuerza y desplazamiento tienen la misma dirección

Cuando la fuerza y el desplazamiento poseen la misma dirección y sentido:

$$\theta = 0^\circ$$

Como:

$$\cos 0^\circ = 1$$

la expresión se reduce a:

$$W = Fd$$

Ejemplo explicado

Una persona empuja una caja con una fuerza constante de 50 N y la desplaza 4 m en la misma dirección.

Entonces:

$$W = 50 \times 4$$

$$W = 200 \text{ J}$$

La fuerza realiza 200 J de trabajo sobre la caja.

Ejercicio 1. Trabajo con fuerza paralela al desplazamiento

Situación: una persona empuja un carrito horizontalmente y este se desplaza en la misma dirección de la fuerza.

Datos:

Fuerza aplicada: $F = 80 \text{ N}$

Desplazamiento: $d = 6 \text{ m}$

Ángulo: $\theta = 0^\circ$

Actividades:

1. Identifica la expresión correspondiente al trabajo.
2. Sustituye los datos.
3. Calcula el trabajo realizado.
4. Expresa el resultado en joules.
5. Determina qué ocurriría con el trabajo si el desplazamiento se duplicara.
6. Determina qué ocurriría si la fuerza se redujera a la mitad.

Interpretación: explica por qué el trabajo es directamente proporcional a la fuerza y al desplazamiento cuando ambas magnitudes permanecen paralelas.

4.1.2. Influencia del ángulo

Cuando la fuerza forma un ángulo con el desplazamiento, solamente la componente paralela de la fuerza contribuye al trabajo.

La componente paralela es:

$$F_{\parallel} = F \cos \theta$$

Por tanto:

$$W = F_{\parallel} d$$

Ejemplo explicado

Una persona hala una maleta con una fuerza de 100 N mediante una cuerda que forma 30° con la horizontal. La maleta se desplaza horizontalmente 5 m.

Componente paralela:

$$F_{\parallel} = 100 \cos 30^\circ$$

$$F_{\parallel} \approx 86,6 \text{ N}$$

Trabajo:

$$W = 86,6 \times 5$$

$$W \approx 433 \text{ J}$$

La componente vertical de la fuerza no contribuye directamente al trabajo asociado con el desplazamiento horizontal.

Ejercicio 2. Trabajo realizado por una fuerza inclinada

Situación: una persona hala una caja mediante una cuerda inclinada.

Datos:

Fuerza: $F = 120 \text{ N}$

Desplazamiento horizontal: $d = 8 \text{ m}$

Ángulo respecto del desplazamiento: $\theta = 35^\circ$

Actividades:

1. Calcula la componente de la fuerza paralela al desplazamiento.
2. Calcula el trabajo realizado.
3. Expresa el resultado en joules.
4. Compara este valor con el trabajo que se realizaría si $\theta = 0^\circ$.
5. Determina qué parte de la fuerza no contribuye directamente al trabajo horizontal.

Interpretación: explica cómo el ángulo modifica la cantidad de trabajo realizada por una fuerza.

4.1.3. Trabajo positivo, negativo y nulo

El signo del trabajo depende del ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.

Si:

$$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$$

el trabajo es positivo.

Si:

$$\theta = 90^\circ$$

el trabajo es cero.

Si:

$$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

el trabajo es negativo.

Ejemplo explicado

Una caja se desplaza hacia la derecha mientras el rozamiento actúa hacia la izquierda.

El ángulo entre ambas direcciones es:

$$\theta = 180^\circ$$

Como:

$$\cos 180^\circ = -1$$

el trabajo realizado por el rozamiento es negativo.

Ejercicio 3. Signo del trabajo

Situación: una caja se desplaza 10 m hacia la derecha y varias fuerzas actúan sobre ella.

Datos:

Fuerza A: **40 N hacia la derecha**

Fuerza B: **15 N hacia la izquierda**

Fuerza C: **30 N hacia arriba**

Actividades:

1. Determina el ángulo entre cada fuerza y el desplazamiento.
2. Calcula el trabajo realizado por la fuerza A.
3. Calcula el trabajo realizado por la fuerza B.
4. Calcula el trabajo realizado por la fuerza C.
5. Clasifica cada trabajo como positivo, negativo o nulo.
6. Calcula la suma de los tres trabajos.

Interpretación: explica por qué una fuerza puede actuar sobre un cuerpo y, sin embargo, realizar trabajo mecánico igual a cero.

4.1.4. Trabajo realizado por el peso

El peso puede realizar trabajo positivo, negativo o nulo dependiendo del desplazamiento.

Si un objeto desciende, el peso y el desplazamiento tienen el mismo sentido y el trabajo del peso es positivo.

Si el objeto asciende, el peso y el desplazamiento tienen sentidos opuestos y el trabajo del peso es negativo.

Si el movimiento es exclusivamente horizontal, el peso es perpendicular al desplazamiento y realiza trabajo nulo.

Ejercicio 4. Trabajo de la fuerza gravitatoria

Situación: una mochila de masa 6 kg es elevada verticalmente 2,5 m.

Datos:

Masa: $m = 6 \text{ kg}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Desplazamiento: $d = 2,5 \text{ m hacia arriba}$

Actividades:

1. Calcula el peso de la mochila.
2. Determina el ángulo entre el peso y el desplazamiento.
3. Calcula el trabajo realizado por el peso.
4. Determina su signo.
5. Explica cómo cambiaría el signo si la mochila descendiera la misma distancia.

Interpretación: explica qué indica físicamente el signo negativo del trabajo realizado por la gravedad durante el ascenso.

4.1.5. Trabajo neto

Cuando varias fuerzas realizan trabajo sobre un cuerpo, el **trabajo neto** puede determinarse sumando los trabajos individuales.

$$W_{\text{neto}} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$$

También puede calcularse a partir de la fuerza neta cuando esta es constante y se conoce su relación con el desplazamiento.

Ejemplo explicado

Una caja se desplaza 5 m.

Fuerza aplicada hacia el movimiento:

60 N

Rozamiento en sentido contrario:

20 N

Trabajo de la fuerza aplicada:

$$W_1 = 60 \times 5 = 300 \text{ J}$$

Trabajo del rozamiento:

$$W_2 = -20 \times 5 = -100 \text{ J}$$

Trabajo neto:

$$W_{\text{neto}} = 200 \text{ J}$$

Ejercicio 5. Trabajo neto sobre un objeto

Situación: una caja se desplaza horizontalmente bajo la acción de una fuerza aplicada y del rozamiento.

Datos:

Fuerza aplicada: **F = 90 N hacia la derecha**

Rozamiento: **f = 30 N hacia la izquierda**

Desplazamiento: **d = 7 m hacia la derecha**

Actividades:

1. Calcula el trabajo de la fuerza aplicada.
2. Calcula el trabajo del rozamiento.
3. Determina el trabajo realizado por el peso.
4. Determina el trabajo realizado por la normal.
5. Calcula el trabajo neto.

Interpretación: explica por qué el trabajo neto puede ser menor que el trabajo realizado por la fuerza aplicada.

4.1.6. Trabajo y representación gráfica

Cuando una fuerza constante actúa en la dirección del desplazamiento, la relación:

$$W = Fd$$

puede interpretarse geométricamente como el área de un rectángulo en una gráfica fuerza-desplazamiento.

Si la fuerza varía, el área bajo la gráfica fuerza-desplazamiento permite determinar el trabajo realizado.

Ejemplo explicado

Una fuerza constante de 10 N actúa desde:

$$x = 0 \text{ m}$$

hasta:

$$x = 4 \text{ m}$$

El área bajo la gráfica es:

$$\text{Área} = 10 \times 4$$

$$\text{Área} = 40 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Por tanto:

$$W = 40 \text{ J}$$

Ejercicio 6. Trabajo a partir de una gráfica fuerza-desplazamiento

Situación: una fuerza constante actúa sobre un objeto durante cierto desplazamiento.

Datos:

Fuerza: $F = 25 \text{ N}$

Intervalo de desplazamiento: $0 \text{ m a } 6 \text{ m}$

Fuerza paralela al movimiento.

Actividades:

1. Esboza la gráfica fuerza-desplazamiento.
2. Identifica la figura geométrica bajo la gráfica.
3. Calcula su área.
4. Expresa el área en $\text{N}\cdot\text{m}$.
5. Convierte el resultado a joules.
6. Relaciona el resultado con la expresión $W = Fd$.

Interpretación: explica por qué el área bajo una gráfica fuerza-desplazamiento posee significado físico.

Actividad integradora. Trabajo realizado sobre una caja

Situación: una caja se desplaza horizontalmente mientras es halada mediante una cuerda inclinada y existe rozamiento.

Datos:

Fuerza aplicada: $F = 100 \text{ N}$

Ángulo: $\theta = 30^\circ$

Rozamiento: $f = 25 \text{ N}$

Desplazamiento: $d = 10 \text{ m}$

Actividades:

1. Calcula la componente horizontal de la fuerza aplicada.
2. Calcula el trabajo realizado por la fuerza aplicada.
3. Calcula el trabajo realizado por el rozamiento.
4. Calcula el trabajo realizado por el peso.
5. Calcula el trabajo realizado por la normal.
6. Determina el trabajo neto.
7. Analiza el signo de cada trabajo.

Interpretación: explica cómo fuerza, desplazamiento, ángulo y signo se integran para determinar la transferencia neta de energía sobre un cuerpo.

Idea fundamental

El trabajo mecánico relaciona una fuerza con el desplazamiento que produce o acompaña. Su valor depende tanto de las magnitudes de la fuerza y del desplazamiento como del ángulo entre ambos.

El signo del trabajo proporciona información sobre si una fuerza favorece, se opone o no contribuye directamente al movimiento considerado.

4.2. Energía cinética**Relación matemática entre masa, velocidad y energía**

Un objeto en movimiento posee capacidad para producir cambios en otros cuerpos. Una pelota en movimiento puede desplazar otro objeto, un automóvil necesita disipar energía para detenerse y una corriente de agua puede hacer girar una turbina.

La energía asociada con el movimiento se denomina **energía cinética**.

Para un cuerpo de masa m que se desplaza con rapidez v , la energía cinética depende tanto de la masa como del cuadrado de la rapidez.

$$KE = \frac{1}{2}mv^2$$

$$KE = \frac{1}{2}(5 \text{ kg})(0 \text{ m/s})^2 = 0 \text{ J}$$

$$\mathrm{KE} = \frac{1}{2} \left(\text{5 kg} \right) \left(\text{0 m/s} \right)^2 = \text{0 J}$$

Masa (m)

5.

kg

Masa (m)

Velocidad (v)

0.

m/s

Velocidad (v)

Enviar comentarios

Observe especialmente qué ocurre al duplicar la masa y qué ocurre al duplicar la rapidez: la primera produce un cambio proporcional, mientras que la segunda produce un efecto mucho mayor debido al término cuadrático.

En el Sistema Internacional, la energía cinética se expresa en joules.

4.2.1. Influencia de la masa

Si la rapidez permanece constante, la energía cinética es directamente proporcional a la masa.

Ejemplo explicado

Dos objetos se desplazan a:

$$v = 4 \text{ m/s}$$

Objeto A:

$$m = 2 \text{ kg}$$

Energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}(2)(4^2)$$

$$E_c = 16 \text{ J}$$

Objeto B:

$$m = 4 \text{ kg}$$

Energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}(4)(4^2)$$

$$E_c = 32 \text{ J}$$

Al duplicarse la masa, la energía cinética se duplica.

Ejercicio 1. Masa y energía cinética

Situación: tres objetos se desplazan con la misma rapidez.

Datos:

Rapidez: $v = 6 \text{ m/s}$

Objeto A: $m = 2 \text{ kg}$

Objeto B: $m = 4 \text{ kg}$

Objeto C: $m = 8 \text{ kg}$

Actividades:

1. Calcula la energía cinética del objeto A.
2. Calcula la energía cinética del objeto B.
3. Calcula la energía cinética del objeto C.
4. Compara los resultados.
5. Determina qué ocurre con la energía cinética cuando la masa se duplica.
6. Organiza los resultados en una tabla.

Interpretación: explica la relación matemática entre masa y energía cinética cuando la rapidez permanece constante.

4.2.2. Influencia de la rapidez

La energía cinética depende del cuadrado de la rapidez.

Esto significa que si la rapidez se duplica:

$$v \rightarrow 2v$$

entonces:

$$v^2 \rightarrow 4v^2$$

y la energía cinética se cuadruplica.

Ejemplo explicado

Un automóvil de $1\,000 \text{ kg}$ se desplaza inicialmente a:

$$v = 10 \text{ m/s}$$

Su energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}(1000)(10^2)$$

$$E_c = 50\,000\text{ J}$$

Si aumenta su rapidez a:

$$20\text{ m/s}$$

entonces:

$$E_c = \frac{1}{2}(1000)(20^2)$$

$$E_c = 200\,000\text{ J}$$

La rapidez se duplicó, pero la energía cinética aumentó cuatro veces.

Ejercicio 2. Efecto de la rapidez sobre la energía cinética

Situación: un vehículo mantiene constante su masa mientras cambia su rapidez.

Datos:

Masa: $m = 800\text{ kg}$

Rapidez A: $v = 5\text{ m/s}$

Rapidez B: $v = 10\text{ m/s}$

Rapidez C: $v = 15\text{ m/s}$

Actividades:

1. Calcula la energía cinética para 5 m/s.
2. Calcula la energía cinética para 10 m/s.
3. Calcula la energía cinética para 15 m/s.
4. Compara los resultados.
5. Determina cuántas veces aumenta la energía al pasar de 5 m/s a 10 m/s.
6. Explica por qué la relación entre energía cinética y rapidez no es lineal.

Interpretación: relaciona el término v^2 con la importancia de controlar la rapidez en situaciones de transporte.

4.2.3. Energía cinética y unidades

La expresión de energía cinética combina kilogramos y metros por segundo.

Las unidades son:

$$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$$

Esta combinación corresponde al joule:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$$

La equivalencia muestra cómo una expresión matemática conserva coherencia dimensional.

Ejercicio 3. Análisis dimensional de la energía cinética

Situación: se desea comprobar la unidad obtenida mediante la expresión de energía cinética.

Datos:

Masa medida en: **kg**

Rapidez medida en: **m/s**

Actividades:

1. Eleva algebraicamente la unidad m/s al cuadrado.
2. Multiplica el resultado por kg.
3. Obtén la unidad $\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$.
4. Relaciona esta unidad con el joule.
5. Explica por qué el factor $1/2$ no modifica las unidades.

Interpretación: explica cómo el análisis dimensional permite comprobar la coherencia de una expresión física.

4.2.4. Cálculo de rapidez a partir de la energía cinética

La relación también puede utilizarse para determinar la rapidez cuando se conocen la masa y la energía.

A partir de la expresión de energía cinética puede despejarse:

$$v = \sqrt{(2E_c/m)}$$

Ejemplo explicado

Un objeto de 4 kg posee:

$$E_c = 200 \text{ J}$$

Entonces:

$$v = \sqrt{(2 \times 200 / 4)}$$

$$v = \sqrt{100}$$

$$v = 10 \text{ m/s}$$

Ejercicio 4. Determinación de la rapidez mediante energía

Situación: un objeto en movimiento posee una energía cinética conocida.

Datos:

Masa: $m = 5 \text{ kg}$

Energía cinética: $E_c = 360 \text{ J}$

Actividades:

1. Despeja la rapidez.
2. Sustituye los datos.
3. Calcula el valor dentro de la raíz cuadrada.
4. Determina la rapidez.
5. Comprueba el resultado sustituyéndolo en la expresión original.

Interpretación: explica por qué la energía cinética permite obtener la magnitud de la velocidad, pero no su dirección.

4.2.5. Teorema trabajo-energía

El trabajo neto realizado sobre un cuerpo está relacionado con el cambio de su energía cinética.

Puede expresarse mediante:

$$W_{\text{neto}} = \Delta E_c$$

Esto significa:

$$W_{\text{neto}} = E_{c,f} - E_{c,i}$$

Si el trabajo neto es positivo, la energía cinética aumenta.

Si es negativo, disminuye.

Si es cero, la energía cinética permanece constante.

Ejemplo explicado

Un objeto posee inicialmente:

$$E_{c,i} = 40 \text{ J}$$

y finalmente:

$$E_{c,f} = 100 \text{ J}$$

Entonces:

$$W_{\text{neto}} = 100 - 40$$

$$W_{\text{neto}} = 60 \text{ J}$$

El trabajo neto aumentó la energía cinética del objeto en 60 J.

Ejercicio 5. Trabajo neto y cambio de energía cinética

Situación: una caja aumenta su rapidez debido a las fuerzas que actúan sobre ella.

Datos:

Masa: $m = 10 \text{ kg}$

Rapidez inicial: $v_i = 2 \text{ m/s}$

Rapidez final: $v_f = 6 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Calcula la energía cinética inicial.
2. Calcula la energía cinética final.
3. Calcula el cambio de energía cinética.
4. Determina el trabajo neto realizado sobre la caja.
5. Indica si el trabajo neto es positivo o negativo.

Interpretación: explica cómo el trabajo de las fuerzas puede modificar el estado de movimiento de un cuerpo.

4.2.6. Energía cinética en situaciones de seguridad

La dependencia cuadrática respecto de la rapidez posee consecuencias importantes en seguridad vial.

Un vehículo que duplica su rapidez no duplica su energía cinética: la cuadruplica.

Por ello, bajo condiciones semejantes, detener un vehículo a mayor rapidez exige disipar una cantidad considerablemente mayor de energía.

Ejercicio 6. Energía cinética y seguridad vial

Situación: un automóvil puede desplazarse a dos rapidezces diferentes.

Datos:

Masa: $m = 1\,200 \text{ kg}$

Situación A: $v = 15 \text{ m/s}$

Situación B: $v = 30 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Calcula la energía cinética en la situación A.
2. Calcula la energía cinética en la situación B.
3. Calcula la razón entre ambas energías.
4. Compara la razón entre las rapidezces.
5. Explica matemáticamente por qué ambas razones no son iguales.

Interpretación: relaciona los resultados con la necesidad de considerar la rapidez como un factor crítico en los procesos de frenado y seguridad vial.

Actividad integradora. Masa, rapidez, trabajo y energía cinética

Situación: un carrito de 20 kg aumenta su rapidez debido a una fuerza neta constante.

Datos:

Rapidez inicial: $v_i = 3 \text{ m/s}$

Rapidez final: $v_f = 9 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Calcula la energía cinética inicial.
2. Calcula la energía cinética final.
3. Calcula el cambio de energía cinética.
4. Determina el trabajo neto realizado.
5. Si la fuerza neta actúa en la dirección del desplazamiento y tiene magnitud 36 N, calcula el desplazamiento necesario para producir ese trabajo.
6. Comprueba la coherencia de las unidades.
7. Explica qué ocurriría con la energía final si la rapidez final se duplicara.

Interpretación: explica cómo las relaciones entre trabajo, masa, rapidez y energía cinética permiten describir una misma transformación física mediante diferentes herramientas matemáticas.

Idea fundamental

La energía cinética depende de la masa y del cuadrado de la rapidez. La masa produce una variación proporcional, mientras que la rapidez posee un efecto cuadrático.

Esta relación permite comprender por qué pequeñas variaciones en la rapidez pueden generar grandes cambios energéticos y conecta directamente el estudio del movimiento con el trabajo realizado por las fuerzas.

4.3. Energía potencial gravitatoria y elástica

Modelización de sistemas donde intervienen altura y deformación

La energía de un sistema no depende únicamente del movimiento. También puede estar asociada con la **posición** o con la **configuración** de sus componentes.

Un objeto elevado respecto de un nivel de referencia posee energía potencial gravitatoria.
Un resorte comprimido o estirado posee energía potencial elástica.

En ambos casos, la energía almacenada puede transformarse posteriormente en otras formas de energía.

4.3.1. Energía potencial gravitatoria

Cerca de la superficie terrestre y para cambios de altura moderados, la energía potencial gravitatoria puede modelizarse a partir de la masa, la aceleración gravitatoria y la altura respecto de un nivel de referencia.

$$PE=mgh$$

$$PE=3,4\times9,8\times9=299,88\text{ J}$$

La gravedad está fijada en $g = 9,8$ en esta visualización.

mmm

3,

kg

mmm

hhh

9,

m

hhh

h

Enviar comentarios

Observe cómo cambia la energía al modificar por separado la masa y la altura. En este modelo, ambas producen variaciones proporcionales de la energía potencial gravitatoria.

La elección del nivel de referencia es importante. Puede asignarse:

$$E_{p,g} = 0 \text{ J}$$

a una altura conveniente, como el suelo, una mesa o un punto determinado del recorrido.

4.3.2. Influencia de la altura

Si la masa y la gravedad permanecen constantes, la energía potencial gravitatoria es directamente proporcional a la altura.

Ejemplo explicado

Un objeto de 5 kg se encuentra a 2 m sobre el nivel de referencia.

Utilizando:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

tenemos:

$$E_{p,g} = 5 \times 9,8 \times 2$$

$$E_{p,g} = 98 \text{ J}$$

Si la altura aumenta a 4 m:

$$E_{p,g} = 196 \text{ J}$$

Al duplicarse la altura, se duplica la energía potencial gravitatoria.

Ejercicio 1. Energía potencial y altura

Situación: una caja de masa constante se coloca a diferentes alturas.

Datos:

Masa: $m = 10 \text{ kg}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Alturas: 1 m, 2 m, 3 m y 5 m

Actividades:

1. Calcula la energía potencial gravitatoria para cada altura.
2. Organiza los resultados en una tabla.
3. Determina qué ocurre cuando la altura se duplica.
4. Describe cómo sería una gráfica energía potencial-altura.
5. Determina la pendiente de esa relación.

Interpretación: explica qué representa físicamente la pendiente de una gráfica $E_{p,g}$ frente a h para una masa constante.

4.3.3. Influencia de la masa

Si la altura permanece constante, la energía potencial gravitatoria aumenta proporcionalmente con la masa.

Ejemplo explicado

A una altura de 3 m:

Objeto A:

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$E_{p,g} = 2 \times 9,8 \times 3$$

$$E_{p,g} = 58,8 \text{ J}$$

Objeto B:

$$m = 4 \text{ kg}$$

$$E_{p,g} = 4 \times 9,8 \times 3$$

$$E_{p,g} = 117,6 \text{ J}$$

Al duplicarse la masa, se duplica la energía.

Ejercicio 2. Masa y energía potencial gravitatoria

Situación: diferentes objetos se encuentran a la misma altura.

Datos:

Altura: $h = 4 \text{ m}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Objeto A: $m = 3 \text{ kg}$

Objeto B: $m = 6 \text{ kg}$

Objeto C: $m = 12 \text{ kg}$

Actividades:

1. Calcula la energía potencial de cada objeto.
2. Compara los resultados.
3. Determina qué ocurre cuando la masa se duplica.
4. Construye una tabla masa-energía.
5. Describe el tipo de relación matemática existente.

Interpretación: explica por qué la masa afecta linealmente la energía potencial gravitatoria dentro de este modelo.

4.3.4. Variación de energía potencial gravitatoria

En muchos problemas interesa más el **cambio de energía potencial** que su valor absoluto.

Si un objeto cambia desde una altura inicial hasta una altura final:

$$\Delta E_{p,g} = mg(h_f - h_i)$$

Ejemplo explicado

Una mochila de 8 kg se eleva desde 1 m hasta 3,5 m.

Cambio de altura:

$$\Delta h = 3,5 - 1$$

$$\Delta h = 2,5 \text{ m}$$

Cambio de energía potencial:

$$\Delta E_{p,g} = 8 \times 9,8 \times 2,5$$

$$\Delta E_{p,g} = 196 \text{ J}$$

Ejercicio 3. Cambio de energía potencial gravitatoria

Situación: una caja es trasladada verticalmente entre dos niveles.

Datos:

Masa: $m = 15 \text{ kg}$

Altura inicial: $h_i = 1,5 \text{ m}$

Altura final: $h_f = 6 \text{ m}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el cambio de altura.
2. Calcula la energía potencial inicial respecto del nivel de referencia elegido.
3. Calcula la energía potencial final.
4. Calcula el cambio de energía potencial.
5. Comprueba que la diferencia entre energía final e inicial coincide con $mg\Delta h$.

Interpretación: explica por qué el cambio de energía potencial depende de la diferencia de alturas y no únicamente de la altura final.

4.3.5. Elección del nivel de referencia

La energía potencial gravitatoria depende del nivel elegido como referencia.

Un mismo objeto puede tener diferentes valores numéricos de energía potencial según dónde se establezca:

$$h = 0$$

Sin embargo, las diferencias de energía entre dos posiciones permanecen coherentes si se utiliza el mismo sistema de referencia.

Ejemplo explicado

Un objeto se encuentra 5 m sobre el suelo.

Si el suelo es el nivel cero:

$$h = 5 \text{ m}$$

Si una plataforma situada 2 m sobre el suelo se elige como referencia:

$$h = 3 \text{ m}$$

El valor absoluto cambia, pero el análisis de las transformaciones debe mantenerse consistente con la referencia seleccionada.

Ejercicio 4. Comparación de niveles de referencia

Situación: un objeto de 4 kg se encuentra a 8 m sobre el suelo.

Datos:

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Referencia A: suelo.

Referencia B: plataforma situada 3 m sobre el suelo.

Actividades:

1. Determina la altura respecto de la referencia A.
2. Calcula la energía potencial respecto de A.
3. Determina la altura respecto de la referencia B.
4. Calcula la energía potencial respecto de B.
5. Compara los resultados.
6. Determina el cambio de energía si el objeto desciende 2 m utilizando ambas referencias.

Interpretación: explica por qué el valor absoluto de la energía potencial depende de la referencia, mientras que los cambios de energía pueden describir el mismo proceso físico.

4.3.6. Energía potencial elástica

Un resorte puede almacenar energía cuando se estira o comprime respecto de su posición de equilibrio.

Para un resorte ideal que cumple la ley de Hooke, la energía potencial elástica se expresa mediante:

$$E_{p,e} = \frac{1}{2}kx^2$$

donde:

- $E_{p,e}$ es la energía potencial elástica;
- k es la constante elástica;
- x es la deformación respecto de la posición de equilibrio.

La dependencia de x^2 muestra que la relación entre energía y deformación es cuadrática.

Ejemplo explicado

Un resorte tiene:

$$k = 200 \text{ N/m}$$

y se comprime:

$$x = 0,10 \text{ m}$$

Entonces:

$$E_{p,e} = \frac{1}{2}(200)(0,10^2)$$

$$E_{p,e} = 100 \times 0,01$$

$$E_{p,e} = 1 \text{ J}$$

Ejercicio 5. Energía almacenada en un resorte

Situación: un resorte se comprime desde su posición de equilibrio.

Datos:

Constante elástica: $k = 300 \text{ N/m}$

Deformación: $x = 0,20 \text{ m}$

Actividades:

1. Calcula el cuadrado de la deformación.
2. Calcula la energía potencial elástica.
3. Expresa el resultado en joules.
4. Calcula la energía si la deformación disminuye a 0,10 m.
5. Compara ambos resultados.
6. Determina cuántas veces cambia la energía cuando la deformación se reduce a la mitad.

Interpretación: explica por qué reducir la deformación a la mitad no reduce la energía almacenada solamente a la mitad.

4.3.7. Relación cuadrática entre deformación y energía

La energía potencial elástica depende de:

$$x^2$$

Por ello:

Si:

$$x \rightarrow 2x$$

entonces:

$$E_{p,e} \rightarrow 4E_{p,e}$$

Si:

$$x \rightarrow 3x$$

entonces:

$$E_{p,e} \rightarrow 9E_{p,e}$$

Esta relación diferencia claramente la energía elástica de una proporcionalidad directa.

Ejercicio 6. Análisis de la relación energía-deformación

Situación: un resorte posee constante elástica fija.

Datos:

Constante: $k = 100 \text{ N/m}$

Deformaciones: 0 m , $0,10 \text{ m}$, $0,20 \text{ m}$, $0,30 \text{ m}$ y $0,40 \text{ m}$

Actividades:

1. Calcula la energía potencial elástica para cada deformación.
2. Organiza los valores en una tabla.
3. Compara los incrementos de energía.
4. Determina si permanecen constantes.
5. Describe la forma esperada de la gráfica $E_{p,e}$ frente a x .
6. Identifica el tipo de función matemática.

Interpretación: explica por qué la gráfica energía-deformación no corresponde a una línea recta.

4.3.8. Constante elástica y energía almacenada

Para una deformación fija, un resorte con mayor constante elástica almacena mayor energía.

La constante k mide la rigidez del resorte.

Un valor grande de k indica que se requiere mayor fuerza para producir una determinada deformación.

Ejemplo explicado

Dos resortes se comprimen 0,10 m.

Resorte A:

$$k = 100 \text{ N/m}$$

Resorte B:

$$k = 300 \text{ N/m}$$

El segundo almacena tres veces más energía porque la deformación es la misma y k es tres veces mayor.

Ejercicio 7. Comparación de resortes

Situación: dos resortes diferentes experimentan la misma deformación.

Datos:

Deformación: $x = 0,15 \text{ m}$

Resorte A: $k = 200 \text{ N/m}$

Resorte B: $k = 500 \text{ N/m}$

Actividades:

1. Calcula la energía potencial elástica del resorte A.
2. Calcula la energía del resorte B.
3. Compara los resultados.
4. Determina cuál es más rígido.
5. Calcula la razón entre ambas energías.

Interpretación: explica cómo la constante elástica influye en la capacidad de un resorte para almacenar energía ante una misma deformación.

4.3.9. Energía gravitatoria y energía elástica

Aunque ambas son formas de energía potencial, sus modelos matemáticos presentan diferencias importantes.

Energía potencial gravitatoria cercana a la superficie terrestre:

$$E_{p,g} \propto h$$

Energía potencial elástica:

$$E_{p,e} \propto x^2$$

La primera presenta una relación lineal con la altura para masa y gravedad constantes.

La segunda presenta una relación cuadrática con la deformación para un valor constante de k .

Ejercicio 8. Comparación de modelos de energía potencial

Situación: se comparan dos sistemas de almacenamiento de energía.

Datos:

Sistema A: objeto de 5 kg elevado a diferentes alturas.

Sistema B: resorte de constante $k = 250 \text{ N/m}$ sometido a diferentes deformaciones.

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la energía gravitatoria del objeto para $h = 1 \text{ m}$ y $h = 2 \text{ m}$.
2. Compara ambos valores.
3. Calcula la energía elástica para $x = 0,10 \text{ m}$ y $x = 0,20 \text{ m}$.
4. Compara ambos valores.
5. Determina cómo cambia cada energía cuando se duplica su variable correspondiente.
6. Identifica qué relación es lineal y cuál cuadrática.

Interpretación: explica cómo dos tipos de energía potencial pueden describirse mediante modelos matemáticos diferentes.

4.3.10. Transformación de energía potencial

La energía potencial almacenada puede transformarse en otras formas.

Cuando un objeto cae, su energía potencial gravitatoria puede transformarse progresivamente en energía cinética.

Cuando un resorte comprimido se libera, su energía potencial elástica puede transformarse en movimiento.

En sistemas ideales, estas transformaciones pueden estudiarse mediante la conservación de la energía, que se desarrollará posteriormente.

Ejercicio 9. De energía potencial a movimiento

Situación: una pelota de 2 kg se mantiene inicialmente a 5 m sobre el suelo y posteriormente se deja caer. Se desprecia la resistencia del aire.

Datos:

Masa: **$m = 2 \text{ kg}$**

Altura inicial: **$h = 5 \text{ m}$**

Gravedad: **$g = 9,8 \text{ m/s}^2$**

Actividades:

1. Calcula la energía potencial gravitatoria inicial.
2. Determina qué sucede con esta energía mientras la pelota desciende.
3. Identifica qué forma de energía aumenta.
4. Calcula la energía potencial cuando la pelota se encuentra a 2 m sobre el suelo.
5. Determina cuánto disminuyó la energía potencial.

Interpretación: explica por qué la disminución de una forma de energía no implica necesariamente que la energía haya desaparecido.

Actividad integradora. Altura, deformación y almacenamiento de energía

Situación: se comparan un objeto elevado y un resorte comprimido.

Datos:

Objeto:

Masa: **$m = 4 \text{ kg}$**

Altura: **$h = 3 \text{ m}$**

Gravedad: **$g = 9,8 \text{ m/s}^2$**

Resorte:

Constante elástica: **$k = 400 \text{ N/m}$**

Deformación: **$x = 0,20 \text{ m}$**

Actividades:

1. Calcula la energía potencial gravitatoria del objeto.
2. Calcula la energía potencial elástica del resorte.

3. Compara ambas energías.
4. Determina qué altura debería tener el objeto para almacenar la misma energía que el resorte.
5. Determina qué deformación debería tener el resorte para almacenar la misma energía que el objeto en la situación inicial.
6. Identifica qué relación matemática es lineal.
7. Identifica cuál es cuadrática.
8. Explica qué variables pueden modificarse para aumentar la energía almacenada en cada sistema.

Interpretación: explica cómo la energía potencial gravitatoria y la elástica muestran que diferentes sistemas físicos pueden almacenar energía mediante mecanismos distintos y ser modelizados mediante relaciones matemáticas diferentes.

Idea fundamental

La energía potencial permite describir la capacidad de un sistema para producir transformaciones debido a su posición o configuración.

En el modelo gravitatorio cercano a la superficie terrestre, la energía depende linealmente de la masa y de la altura. En un resorte ideal, la energía depende de la constante elástica y del cuadrado de la deformación.

Estas relaciones muestran cómo funciones lineales y cuadráticas pueden utilizarse para modelizar diferentes formas de almacenamiento de energía en sistemas físicos.

4.4. Conservación de la energía mecánica

Transformaciones entre diferentes formas de energía

En numerosos sistemas físicos, la energía cambia de una forma a otra sin desaparecer. Una pelota que cae pierde energía potencial gravitatoria mientras aumenta su energía cinética; un objeto lanzado hacia arriba disminuye progresivamente su energía cinética mientras aumenta su energía potencial; un resorte comprimido puede transferir la energía almacenada a un cuerpo y ponerlo en movimiento.

La **energía mecánica** de un sistema puede entenderse como la suma de las formas de energía asociadas con el movimiento y la posición o configuración de los cuerpos.

Cuando intervienen únicamente la energía cinética y la energía potencial gravitatoria:

$$E_m = E_c + E_{p,g}$$

Si además existe energía potencial elástica:

$$E_m = E_c + E_{p,g} + E_{p,e}$$

En un sistema ideal donde no actúan fuerzas disipativas como el rozamiento, la energía mecánica total permanece constante.

4.4.1. Conservación de la energía mecánica

Si la energía mecánica se conserva, la energía total al inicio de un proceso es igual a la energía total al final.

Esta idea puede expresarse como:

$$E_{m,i} = E_{m,f}$$

Para comprender visualmente esta transformación, observe cómo cambia la energía potencial cuando cambia la altura y cómo la energía cinética aumenta o disminuye en sentido complementario. La cantidad importante que debe mantenerse constante es la suma de ambas.

$$E_{total} = PE + KE$$

Desde 6 m, 58,8 J alternan entre EP y EC

Altura inicial (h_0)

6

m

Altura inicial (h_0)

$$h = 2,9 \text{ m} \quad v = 7,8 \text{ m/s}$$

Energía total: 58,8 J

$$PE \ 28,2 \text{ J} \quad KE \ 30,6 \text{ J} \quad v = 7,8 \text{ m/s}$$

Enviar comentarios

En un sistema ideal sin rozamiento, cuando una forma de energía disminuye, otra aumenta de tal manera que la energía mecánica total permanece constante.

Ejemplo explicado

Una pelota de 2 kg se encuentra inicialmente en reposo a una altura de 5 m.

Datos:

Masa: **$m = 2 \text{ kg}$**

Altura inicial: **$h = 5 \text{ m}$**

Rapidez inicial: **$v = 0 \text{ m/s}$**

Gravedad: **$g = 9,8 \text{ m/s}^2$**

Energía cinética inicial:

$$E_{c,i} = 0 \text{ J}$$

Energía potencial inicial:

$$E_{p,i} = 2 \times 9,8 \times 5$$

$$E_{p,i} = 98 \text{ J}$$

Por tanto:

$$E_{m,i} = 98 \text{ J}$$

Si se desprecia la resistencia del aire, inmediatamente antes de llegar al suelo puede tomarse:

$$E_{p,f} = 0 \text{ J}$$

Por conservación:

$$E_{c,f} = 98 \text{ J}$$

La energía potencial inicial se ha transformado en energía cinética.

Ejercicio 1. Transformación de energía durante una caída

Situación: una esfera se deja caer desde cierta altura y se desprecia la resistencia del aire.

Datos:

Masa: $m = 3 \text{ kg}$

Altura inicial: $h = 8 \text{ m}$

Rapidez inicial: $v = 0 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la energía cinética inicial.
2. Calcula la energía potencial gravitatoria inicial.
3. Determina la energía mecánica inicial.
4. Determina la energía potencial inmediatamente antes de llegar al suelo tomando el suelo como referencia.
5. Calcula la energía cinética final.
6. Utiliza la energía cinética final para determinar la rapidez inmediatamente antes de llegar al suelo.

Interpretación: explica cómo cambia cada forma de energía mientras la esfera desciende y qué cantidad permanece constante.

4.4.2. Transformación durante un ascenso

Cuando un objeto asciende sin pérdidas apreciables de energía, su energía cinética disminuye mientras su energía potencial gravitatoria aumenta.

En el punto más alto de un lanzamiento vertical, la rapidez instantánea puede llegar a cero. En ese instante, la energía cinética es mínima y la energía potencial gravitatoria alcanza su valor máximo.

Ejemplo explicado

Una pelota de 1 kg se lanza verticalmente desde el suelo con una rapidez inicial de 14 m/s.

Energía cinética inicial:

$$E_{c,i} = \frac{1}{2}(1)(14^2)$$

$$E_{c,i} = 98 \text{ J}$$

Si el suelo corresponde a:

$$E_{p,i} = 0 \text{ J}$$

entonces:

$$E_m = 98 \text{ J}$$

En la altura máxima:

$$E_{c,f} = 0 \text{ J}$$

Por tanto:

$$E_{p,f} = 98 \text{ J}$$

La altura máxima puede calcularse mediante:

$$98 = 1 \times 9,8 \times h$$

$$h = 10 \text{ m}$$

Ejercicio 2. De energía cinética a energía potencial

Situación: un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde el suelo.

Datos:

Masa: $m = 2 \text{ kg}$

Rapidez inicial: $v_i = 20 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Nivel de referencia: suelo.

Actividades:

1. Calcula la energía cinética inicial.
2. Determina la energía potencial inicial.
3. Calcula la energía mecánica total.
4. Determina la energía cinética en la altura máxima.
5. Calcula la energía potencial en la altura máxima.
6. Determina la altura máxima utilizando conservación de la energía.

Interpretación: explica por qué la rapidez disminuye durante el ascenso aunque la energía total del sistema permanezca constante.

4.4.3. Energía en posiciones intermedias

La conservación de la energía no se aplica únicamente entre el inicio y el final de un movimiento. Puede utilizarse en cualquier posición intermedia.

Si la energía mecánica total es:

$$E_m = 200 \text{ J}$$

y en cierto punto la energía potencial es:

$$E_p = 80 \text{ J}$$

entonces:

$$E_c = 200 - 80$$

$$E_c = 120 \text{ J}$$

La distribución entre energía cinética y potencial puede cambiar continuamente mientras la suma permanece constante.

Ejercicio 3. Energía en un punto intermedio

Situación: una esfera cae desde una altura inicial sin resistencia del aire.

Datos:

Masa: $m = 4 \text{ kg}$

Altura inicial: $h_i = 10 \text{ m}$

Rapidez inicial: 0 m/s

Altura intermedia: $h = 6 \text{ m}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la energía mecánica inicial.
2. Calcula la energía potencial cuando la esfera está a 6 m.
3. Determina la energía cinética en esa posición.
4. Calcula la rapidez correspondiente.
5. Determina cuánto disminuyó la energía potencial respecto del punto inicial.
6. Compara esa disminución con el aumento de energía cinética.

Interpretación: explica qué evidencia matemática muestra que la energía se ha transformado y no se ha perdido.

4.4.4. Conservación con energía potencial elástica

La energía mecánica también puede conservarse en sistemas con resortes ideales.

La energía almacenada en un resorte puede transformarse en energía cinética:

$$E_{p,e \text{ inicial}} \rightarrow E_{c \text{ final}}$$

Si no existen otras transformaciones relevantes:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Ejemplo explicado

Un resorte de constante:

$$k = 200 \text{ N/m}$$

se comprime:

$$x = 0,20 \text{ m}$$

La energía almacenada es:

$$E_{p,e} = \frac{1}{2}(200)(0,20^2)$$

$$E_{p,e} = 4 \text{ J}$$

Si toda esa energía se transfiere a un cuerpo de 0,5 kg:

$$4 = \frac{1}{2}(0,5)v^2$$

$$4 = 0,25v^2$$

$$v^2 = 16$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

Ejercicio 4. Del resorte al movimiento

Situación: un resorte comprimido impulsa un bloque sobre una superficie horizontal sin rozamiento.

Datos:

Constante elástica: $k = 300 \text{ N/m}$

Compresión: $x = 0,15 \text{ m}$

Masa del bloque: $m = 0,75 \text{ kg}$

Actividades:

1. Calcula la energía potencial elástica inicial.
2. Determina la energía cinética máxima que puede adquirir el bloque.
3. Calcula la rapidez correspondiente.
4. Determina la energía potencial del resorte cuando recupera su longitud de equilibrio.
5. Comprueba la conservación de la energía.

Interpretación: explica por qué la rapidez máxima se alcanza cuando el resorte pasa por su posición de equilibrio en este modelo ideal.

4.4.5. Energía gravitatoria y elástica en un mismo sistema

Algunos sistemas contienen simultáneamente energía cinética, gravitatoria y elástica.

En estos casos:

$$E_m = E_c + E_{p,g} + E_{p,e}$$

La distribución entre las tres formas puede cambiar durante el movimiento.

Ejercicio 5. Sistema con altura y resorte

Situación: un bloque se encuentra inicialmente en reposo sobre una plataforma y comprime un resorte. Posteriormente es liberado.

Datos:

Masa: $m = 1 \text{ kg}$

Altura inicial: $h = 2 \text{ m}$

Constante del resorte: $k = 200 \text{ N/m}$

Compresión: $x = 0,10 \text{ m}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la energía potencial gravitatoria inicial.
2. Calcula la energía potencial elástica inicial.
3. Determina la energía cinética inicial.
4. Calcula la energía mecánica total.
5. Supón que posteriormente el bloque llega al nivel de referencia con el resorte sin deformación. Determina la energía cinética en ese instante.
6. Calcula la rapidez correspondiente.

Interpretación: explica cómo dos formas diferentes de energía potencial pueden contribuir simultáneamente a la energía mecánica de un sistema.

4.4.6. Sistemas con rozamiento

Cuando existe rozamiento, la energía mecánica no necesariamente permanece constante.

Parte de la energía mecánica puede transformarse en energía interna, principalmente asociada con el aumento de temperatura de los cuerpos y superficies.

Por tanto:

$$E_{m,f} < E_{m,i}$$

puede ocurrir aunque la energía total, considerada de manera más amplia, siga conservándose.

Ejemplo explicado

Un bloque posee inicialmente:

$$E_{m,i} = 100 \text{ J}$$

Después de deslizarse sobre una superficie rugosa posee:

$$E_{m,f} = 70 \text{ J}$$

La diferencia es:

$$30 \text{ J}$$

Estos 30 J de energía mecánica se transformaron en otras formas, principalmente energía interna.

Ejercicio 6. Pérdida de energía mecánica por rozamiento

Situación: un bloque se desliza por una superficie rugosa y disminuye su energía mecánica.

Datos:

Energía mecánica inicial: $E_{m,i} = 250 \text{ J}$

Energía mecánica final: $E_{m,f} = 190 \text{ J}$

Actividades:

1. Calcula la disminución de energía mecánica.
2. Determina qué porcentaje de la energía mecánica inicial se perdió como energía mecánica.
3. Explica en qué forma puede haberse transformado esa energía.
4. Determina qué porcentaje de energía mecánica permanece.
5. Explica si esto viola el principio general de conservación de la energía.

Interpretación: diferencia entre conservación de la energía total y conservación de la energía mecánica.

4.4.7. Conservación y gráficas energéticas

La evolución energética puede representarse mediante tablas o gráficas.

Por ejemplo:

Posición	E_c (J)	E_p (J)	E_m (J)
A	0	100	100
B	30	70	100
C	60	40	100
D	100	0	100

Aunque E_c y E_p cambian, E_m permanece constante.

Ejercicio 7. Lectura de una tabla de energía

Situación: se analiza un sistema ideal.

Datos:

Punto	E_c (J)	$E_{p,g}$ (J)
A	0	160
B	40	120
C	90	70
D	160	0

Actividades:

1. Calcula la energía mecánica en cada punto.
2. Comprueba si permanece constante.
3. Identifica el punto de mayor energía potencial.
4. Identifica el punto de mayor energía cinética.
5. Determina el cambio de energía potencial entre A y C.
6. Determina el cambio de energía cinética entre A y C.

Interpretación: explica qué relación observas entre la disminución de una forma de energía y el aumento de la otra.

Actividad integradora. Transformaciones de energía en una pista

Situación: un carrito de 2 kg parte del reposo desde una altura de 12 m y se desplaza por una pista ideal sin rozamiento.

Datos:

Masa: $m = 2 \text{ kg}$

Altura inicial: $h_i = 12 \text{ m}$

Rapidez inicial: $v_i = 0 \text{ m/s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Punto B: $h = 8 \text{ m}$

Punto C: $h = 3 \text{ m}$

Punto D: $h = 0 \text{ m}$

Actividades:

1. Calcula la energía mecánica inicial.
2. Calcula la energía potencial y cinética en B.
3. Calcula la rapidez en B.
4. Calcula la energía potencial y cinética en C.
5. Calcula la rapidez en C.
6. Calcula la energía cinética en D.
7. Determina la rapidez en D.
8. Construye una tabla con E_c , E_p y E_m en todos los puntos.
9. Comprueba la conservación de la energía mecánica.

Interpretación: explica cómo la posición y la rapidez cambian simultáneamente mientras la energía mecánica total permanece constante.

Idea fundamental

La conservación de la energía mecánica permite analizar transformaciones entre energía cinética, gravitatoria y elástica sin estudiar necesariamente cada fuerza durante todo el movimiento.

En sistemas ideales, la disminución de una forma de energía se compensa con el aumento de otra. Cuando existen fuerzas disipativas, la energía mecánica puede disminuir porque parte de ella se transforma en otras formas de energía.

4.5. Potencia y eficiencia

Análisis de máquinas, dispositivos y consumo energético

Dos máquinas pueden realizar el mismo trabajo y, sin embargo, hacerlo en tiempos diferentes. Una grúa puede elevar una carga en pocos segundos, mientras otra puede necesitar mucho más tiempo para realizar exactamente la misma tarea.

La magnitud que relaciona el trabajo realizado o la energía transferida con el tiempo se denomina **potencia**.

La potencia media se calcula mediante:

$$P = W/t$$

También puede expresarse como:

$$P = \Delta E/t$$

En el Sistema Internacional, la potencia se mide en **watts**, cuyo símbolo es **W**.

Un watt equivale a:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

Esto significa que un dispositivo de 1 W transfiere un joule de energía por segundo.

4.5.1. Trabajo y tiempo

La potencia no indica únicamente cuánto trabajo se realiza, sino qué tan rápidamente se realiza.

Ejemplo explicado

Una máquina realiza:

$$W = 6\,000 \text{ J}$$

en:

$$t = 20 \text{ s}$$

Entonces:

$$P = 6\,000 \div 20$$

$$P = 300 \text{ W}$$

Otra máquina que realice los mismos 6 000 J en 10 s tendrá:

$$P = 600 \text{ W}$$

Realiza el mismo trabajo, pero en la mitad del tiempo.

Ejercicio 1. Comparación de potencia entre máquinas

Situación: dos máquinas realizan el mismo trabajo en tiempos diferentes.

Datos:

Trabajo realizado por cada máquina: $W = 12\,000\text{ J}$

Máquina A: $t = 30\text{ s}$

Máquina B: $t = 20\text{ s}$

Actividades:

1. Calcula la potencia de la máquina A.
2. Calcula la potencia de la máquina B.
3. Compara los resultados.
4. Determina cuántas veces más potente es una respecto de la otra.
5. Explica por qué ambas realizan el mismo trabajo aunque sus potencias sean diferentes.

Interpretación: explica la diferencia conceptual entre trabajo y potencia.

4.5.2. Potencia en procesos de elevación

Cuando un objeto se eleva a velocidad constante, el trabajo necesario para aumentar su energía potencial gravitatoria es:

$$W = mgh$$

Por tanto:

$$P = mgh/t$$

Ejemplo explicado

Una grúa eleva una masa de 100 kg hasta 8 m en 10 s.

Trabajo:

$$W = 100 \times 9,8 \times 8$$

$$W = 7\,840\text{ J}$$

Potencia:

$$P = 7\,840 \div 10$$

$$P = 784\text{ W}$$

Ejercicio 2. Potencia de una grúa

Situación: una grúa eleva una carga verticalmente a velocidad aproximadamente constante.

Datos:

Masa: $m = 500 \text{ kg}$

Altura: $h = 12 \text{ m}$

Tiempo: $t = 30 \text{ s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el aumento de energía potencial.
2. Determina el trabajo realizado sobre la carga.
3. Calcula la potencia media.
4. Expresa el resultado en watts.
5. Convierte la potencia a kilowatts.
6. Calcula qué potencia sería necesaria para realizar la misma tarea en 15 s.

Interpretación: explica por qué reducir el tiempo de ejecución aumenta la potencia requerida aunque el trabajo sea el mismo.

4.5.3. Kilowatt y kilowatt-hora

En dispositivos eléctricos se utiliza frecuentemente el kilowatt:

$$1 \text{ kW} = 1\,000 \text{ W}$$

La energía consumida puede expresarse en **kilowatt-hora (kWh)**.

Un dispositivo de 1 kW funcionando durante una hora utiliza:

$$1 \text{ kWh}$$

El kilowatt-hora es una unidad de energía, no de potencia.

Ejemplo explicado

Un calentador de:

$$2 \text{ kW}$$

funciona durante:

$$3 \text{ h}$$

La energía consumida es:

$$E = 2 \times 3$$

$$E = 6 \text{ kWh}$$

Ejercicio 3. Consumo energético de un dispositivo

Situación: un calefactor eléctrico funciona durante varias horas.

Datos:

Potencia: **$P = 1,5 \text{ kW}$**

Tiempo de funcionamiento: **$t = 4 \text{ h}$**

Actividades:

1. Calcula la energía consumida en kWh.
2. Calcula la energía consumida si funciona 6 h.
3. Determina cuánto aumenta el consumo.
4. Calcula cuánta energía consumiría durante 30 días si funciona 4 h diarias.
5. Explica la diferencia entre kW y kWh.

Interpretación: explica por qué conocer solamente la potencia de un dispositivo no permite determinar su consumo total sin conocer también el tiempo de funcionamiento.

4.5.4. Potencia mecánica y velocidad

Cuando una fuerza constante actúa en la misma dirección del movimiento:

$$W = Fd$$

Como:

$$P = W/t$$

y:

$$v = d/t$$

se obtiene:

$$P = Fv$$

Esta relación es especialmente útil en situaciones donde una fuerza produce movimiento a velocidad constante.

Ejemplo explicado

Una máquina ejerce una fuerza de:

$$F = 500 \text{ N}$$

mientras un objeto se desplaza a:

$$v = 2 \text{ m/s}$$

Entonces:

$$P = 500 \times 2$$

$$P = 1\,000\text{ W}$$

Ejercicio 4. Fuerza, velocidad y potencia

Situación: un sistema de arrastre mantiene una fuerza constante sobre un objeto que se desplaza uniformemente.

Datos:

Fuerza: $F = 800\text{ N}$

Velocidad: $v = 3\text{ m/s}$

Actividades:

1. Calcula la potencia mecánica.
2. Expresa el resultado en watts.
3. Convierte el resultado a kilowatts.
4. Calcula la potencia si la velocidad aumenta a 5 m/s manteniendo la misma fuerza.
5. Determina qué ocurre con la potencia al aumentar la velocidad.

Interpretación: explica por qué una máquina necesita transferir energía más rápidamente cuando realiza el mismo tipo de esfuerzo a mayor velocidad.

4.5.5. Eficiencia de una máquina

Ninguna máquina real transforma toda la energía recibida en energía útil. Parte puede transformarse en calor, sonido, vibraciones u otras formas que no corresponden al propósito principal del dispositivo.

La **eficiencia** compara la energía útil obtenida con la energía suministrada.

Puede expresarse como:

$$\eta = E_{\text{útil}}/E_{\text{suministrada}}$$

Para expresarla como porcentaje:

$$\eta\% = (E_{\text{útil}}/E_{\text{suministrada}}) \times 100$$

La eficiencia también puede calcularse mediante potencias:

$$\eta\% = (P_{\text{útil}}/P_{\text{entrada}}) \times 100$$

Ejemplo explicado

Una máquina recibe:

1 000 J

y transforma:

750 J

en energía útil.

Entonces:

$$\eta = 750/1\,000$$

$$\eta = 0,75$$

Como porcentaje:

$$\eta = 75 \%$$

Ejercicio 5. Eficiencia energética de una máquina

Situación: una máquina recibe energía y entrega una cantidad menor como energía útil.

Datos:

Energía suministrada: **Eentrada = 5 000 J**

Energía útil: **Eútil = 4 000 J**

Actividades:

1. Calcula la eficiencia como razón decimal.
2. Convierte la razón a porcentaje.
3. Calcula la energía no aprovechada como energía útil.
4. Determina qué porcentaje representa esa energía.
5. Comprueba que ambos porcentajes suman 100 %.

Interpretación: explica qué significa afirmar que una máquina posee una eficiencia del 80 %.

4.5.6. Potencia de entrada y potencia útil

La eficiencia también puede analizarse utilizando potencia.

Si un motor recibe:

Pentrada = 2 000 W

y entrega:

Pútil = 1 600 W

su eficiencia es:

$$\eta = 1\,600/2\,000$$

$$\eta = 0,80$$

$$\eta = 80 \%$$

La diferencia de potencia:

$$400 \text{ W}$$

corresponde a energía transferida por unidad de tiempo hacia formas no consideradas útiles para la función principal.

Ejercicio 6. Potencia y eficiencia de un motor

Situación: un motor eléctrico convierte potencia de entrada en potencia mecánica útil.

Datos:

Potencia de entrada: **P_{entrada} = 3 000 W**

Potencia útil: **P_{útil} = 2 400 W**

Actividades:

1. Calcula la eficiencia.
2. Exprésala como porcentaje.
3. Calcula la potencia no aprovechada como útil.
4. Determina qué porcentaje representa.
5. Calcula qué potencia útil produciría si la eficiencia aumentara al 90 % manteniendo la misma potencia de entrada.

Interpretación: explica por qué aumentar la eficiencia puede mejorar el aprovechamiento energético sin aumentar necesariamente la potencia suministrada.

4.5.7. Comparación entre dispositivos

Para comparar máquinas no basta con observar únicamente su potencia. También es importante considerar:

- energía consumida;
- tiempo de funcionamiento;
- trabajo útil;
- eficiencia;
- condiciones de operación.

Un dispositivo de mayor potencia puede realizar una tarea más rápidamente, pero también puede consumir más energía si funciona durante períodos prolongados.

Ejercicio 7. Comparación de dos sistemas

Situación: dos máquinas realizan la misma tarea.

Datos:

Máquina A:

Potencia de entrada: **2,0 kW**

Eficiencia: **75 %**

Máquina B:

Potencia de entrada: **1,8 kW**

Eficiencia: **90 %**

Actividades:

1. Calcula la potencia útil de la máquina A.
2. Calcula la potencia útil de la máquina B.
3. Compara las potencias útiles.
4. Determina cuál pierde mayor potencia.
5. Calcula la potencia no útil de cada una.
6. Determina cuál aprovecha mejor la energía suministrada.

Interpretación: explica por qué la máquina con mayor potencia de entrada no necesariamente proporciona mayor potencia útil.

Actividad integradora. Potencia, energía y eficiencia

Situación: un elevador transporta una carga verticalmente.

Datos:

Masa total: **$m = 600 \text{ kg}$**

Altura: **$h = 15 \text{ m}$**

Tiempo: **$t = 25 \text{ s}$**

Gravedad: **$g = 9,8 \text{ m/s}^2$**

Eficiencia del sistema: **$\eta = 80 \%$**

Actividades:

1. Calcula la energía potencial ganada por la carga.
2. Determina el trabajo útil.
3. Calcula la potencia útil.

4. Expresa la potencia útil en kW.
5. Determina la energía de entrada necesaria considerando la eficiencia.
6. Calcula la potencia de entrada.
7. Determina la energía que no se transforma en trabajo útil.
8. Calcula qué potencia de entrada sería necesaria si la eficiencia aumentara al 90 %.

Interpretación: explica cómo tiempo, trabajo, potencia y eficiencia permiten evaluar conjuntamente el desempeño de una máquina.

Idea fundamental

La potencia mide la rapidez con la que se realiza trabajo o se transfiere energía. La eficiencia compara la parte útil de esa transferencia con la energía o potencia suministrada.

Analizar ambos conceptos permite comparar dispositivos de manera más completa y comprender por qué una máquina puede ser muy potente sin ser necesariamente eficiente.

4.6. Porcentajes, razones y eficiencia energética

Aplicación de herramientas matemáticas para comparar sistemas

Los porcentajes y las razones permiten comparar sistemas físicos de manera objetiva. Son especialmente útiles para analizar eficiencia, consumo energético, pérdidas, ahorro y desempeño de máquinas o dispositivos.

Una razón compara dos cantidades mediante una división. Un porcentaje expresa esa relación respecto de 100.

Por ejemplo, si una máquina transforma 80 J de cada 100 J recibidos en energía útil:

$$80/100 = 0,80$$

y:

$$0,80 \times 100 = 80 \%$$

Estas herramientas permiten traducir relaciones físicas a valores fácilmente comparables.

4.6.1. Razones

Una **razón** expresa la relación entre dos cantidades.

Si una máquina recibe 500 J y entrega 400 J útiles:

$$\text{razón útil/entrada} = 400/500$$

$$\text{razón} = 0,8$$

La razón indica que se aprovechan 0,8 unidades de energía útil por cada unidad de energía suministrada.

Ejercicio 1. Construcción e interpretación de razones

Situación: tres dispositivos reciben diferentes cantidades de energía.

Datos:

Dispositivo A: **800 J de entrada y 640 J útiles**

Dispositivo B: **1 000 J de entrada y 750 J útiles**

Dispositivo C: **600 J de entrada y 510 J útiles**

Actividades:

1. Calcula la razón energía útil/energía de entrada para A.
2. Calcula la razón para B.
3. Calcula la razón para C.
4. Ordena los dispositivos según la razón obtenida.
5. Identifica cuál aprovecha mayor fracción de la energía recibida.

Interpretación: explica por qué las razones permiten comparar dispositivos aunque reciban cantidades de energía diferentes.

4.6.2. Conversión de razones a porcentajes

Para convertir una razón decimal a porcentaje se multiplica por 100.

Por ejemplo:

$$0,72 \times 100 = 72 \%$$

Inversamente:

$$85 \% = 0,85$$

Esta conversión es fundamental en problemas de eficiencia.

Ejercicio 2. De razón decimal a porcentaje

Situación: se obtienen diferentes razones de aprovechamiento energético.

Datos:

A: **0,65**

B: **0,82**

C: **0,91**

D: **0,74**

Actividades:

1. Convierte cada razón a porcentaje.
2. Ordena los valores de menor a mayor eficiencia.
3. Identifica la mayor eficiencia.
4. Calcula la diferencia porcentual entre la mayor y la menor.
5. Convierte nuevamente 91 % a forma decimal para comprobar el procedimiento.

Interpretación: explica por qué las formas decimal y porcentual representan la misma relación.

4.6.3. Cálculo de energía útil mediante porcentaje

Si conocemos la energía suministrada y la eficiencia:

$$E_{\text{útil}} = \eta \times E_{\text{entrada}}$$

cuando η se utiliza en forma decimal.

Ejemplo explicado

Un dispositivo recibe:

$$E_{\text{entrada}} = 2\,000\text{ J}$$

con una eficiencia de:

$$\eta = 75\% = 0,75$$

Entonces:

$$E_{\text{útil}} = 0,75 \times 2\,000$$

$$E_{\text{útil}} = 1\,500\text{ J}$$

Ejercicio 3. Energía útil a partir de la eficiencia

Situación: una máquina recibe energía durante un proceso.

Datos:

Energía de entrada: $E_{\text{entrada}} = 8\,000\text{ J}$

Eficiencia: $\eta = 85\%$

Actividades:

1. Convierte la eficiencia a forma decimal.
2. Calcula la energía útil.
3. Calcula la energía que no se aprovecha como útil.
4. Determina qué porcentaje representa esa energía.

5. Comprueba que la suma de ambas energías coincide con la entrada.

Interpretación: explica por qué una eficiencia del 85 % implica que 15 % de la energía suministrada se transforma en formas no consideradas útiles.

4.6.4. Cálculo de energía de entrada

También puede determinarse cuánta energía debe suministrarse para obtener cierta cantidad útil.

A partir de:

$$\eta = E_{\text{útil}}/E_{\text{entrada}}$$

se obtiene:

$$E_{\text{entrada}} = E_{\text{útil}}/\eta$$

Ejemplo explicado

Se necesitan:

$$E_{\text{útil}} = 900 \text{ J}$$

y la máquina posee:

$$\eta = 75 \% = 0,75$$

Entonces:

$$E_{\text{entrada}} = 900/0,75$$

$$E_{\text{entrada}} = 1\,200 \text{ J}$$

Ejercicio 4. Energía necesaria para una tarea

Situación: una máquina debe entregar determinada cantidad de energía útil.

Datos:

Energía útil necesaria: $E_{\text{útil}} = 4\,500 \text{ J}$

Eficiencia: $\eta = 90 \%$

Actividades:

1. Convierte la eficiencia a decimal.
2. Calcula la energía de entrada necesaria.
3. Calcula la energía no aprovechada como útil.
4. Comprueba la eficiencia utilizando los valores obtenidos.

5. Determina cuánta energía de entrada sería necesaria si la eficiencia disminuyera al 75 %.

Interpretación: explica por qué una máquina menos eficiente requiere mayor energía de entrada para realizar la misma tarea útil.

4.6.5. Porcentaje de pérdida

Si una máquina posee una eficiencia de:

$$\eta = 80 \%$$

el porcentaje restante es:

$$100 \% - 80 \% = 20 \%$$

Este valor puede interpretarse como la fracción de energía que no se convierte en la forma útil considerada.

Ejercicio 5. Eficiencia y porcentaje no útil

Situación: se comparan varios sistemas.

Datos:

Sistema A: $\eta = 92 \%$

Sistema B: $\eta = 78 \%$

Sistema C: $\eta = 65 \%$

Actividades:

1. Calcula el porcentaje no útil de A.
2. Calcula el porcentaje no útil de B.
3. Calcula el porcentaje no útil de C.
4. Ordena los sistemas desde la menor hasta la mayor pérdida porcentual.
5. Determina cuántos puntos porcentuales separan a A y C.

Interpretación: explica la diferencia entre decir que dos sistemas difieren en 27 puntos porcentuales y afirmar que uno es 27 % más eficiente que otro.

4.6.6. Diferencia porcentual y puntos porcentuales

Los **puntos porcentuales** representan una resta directa entre porcentajes.

Si una eficiencia cambia de:

$$70 \% \text{ a } 85 \%$$

el aumento es:

15 puntos porcentuales

Pero el aumento relativo respecto del valor inicial es:

$$(85 - 70)/70 \times 100$$

$$\approx 21,4 \%$$

Ambas afirmaciones describen comparaciones distintas.

Ejercicio 6. Comparación correcta de eficiencias

Situación: un dispositivo antiguo es reemplazado por un modelo nuevo.

Datos:

Eficiencia antigua: **72 %**

Eficiencia nueva: **90 %**

Actividades:

1. Calcula la diferencia en puntos porcentuales.
2. Calcula el aumento relativo respecto de la eficiencia antigua.
3. Compara ambos resultados.
4. Explica por qué no deben utilizarse como si fueran equivalentes.
5. Determina el porcentaje no útil de cada dispositivo.

Interpretación: explica cuándo resulta más apropiado utilizar puntos porcentuales y cuándo un cambio porcentual relativo.

4.6.7. Comparación del consumo energético

Los porcentajes también permiten evaluar reducciones de consumo.

Si un dispositivo antiguo consume:

100 kWh

y uno nuevo consume:

75 kWh

para la misma tarea, la reducción es:

25 kWh

El porcentaje de reducción respecto del consumo original es:

$$25/100 \times 100 = 25 \%$$

Ejercicio 7. Reducción del consumo

Situación: una institución reemplaza un sistema de iluminación por uno de menor consumo.

Datos:

Consumo anterior: **1 200 kWh/mes**

Consumo nuevo: **900 kWh/mes**

Actividades:

1. Calcula la reducción mensual en kWh.
2. Calcula el porcentaje de reducción respecto del consumo anterior.
3. Calcula el ahorro energético anual en kWh.
4. Determina el consumo anual del sistema nuevo.
5. Compara ambos consumos anuales.

Interpretación: explica por qué para calcular un porcentaje de reducción debe utilizarse como referencia el valor inicial.

4.6.8. Eficiencia y consumo no son equivalentes

Un dispositivo eficiente no necesariamente consume poca energía en términos absolutos.

Un equipo de gran potencia puede ser muy eficiente y consumir más energía total que un dispositivo pequeño debido a la tarea realizada o al tiempo de funcionamiento.

Por ello deben diferenciarse:

- **eficiencia:** relación entre energía útil y energía suministrada;
- **consumo:** cantidad total de energía utilizada;
- **potencia:** rapidez con la que se utiliza o transfiere energía.

Ejercicio 8. Eficiencia frente a consumo

Situación: se comparan dos dispositivos.

Datos:

Dispositivo A:

Energía de entrada: **10 kWh**

Eficiencia: **90 %**

Dispositivo B:

Energía de entrada: **6 kWh**

Eficiencia: 75 %

Actividades:

1. Calcula la energía útil de A.
2. Calcula la energía útil de B.
3. Calcula la energía no útil de cada uno.
4. Determina cuál es más eficiente.
5. Determina cuál consume menos energía.
6. Compara la energía útil entregada por ambos.

Interpretación: explica por qué “más eficiente” y “menor consumo” no significan necesariamente lo mismo.

4.6.9. Comparación mediante razones de desempeño

También pueden construirse razones para comparar sistemas.

Por ejemplo:

energía útil/tiempo

corresponde a potencia útil.

Otra razón puede ser:

energía útil/costo

si se desea analizar el aprovechamiento económico de la energía.

Las razones permiten incorporar distintas variables de decisión.

Ejercicio 9. Comparación multicriterio

Situación: se analizan dos sistemas que realizan la misma tarea.

Datos:

Sistema A:

Energía útil: **8 kWh**

Energía consumida: **10 kWh**

Tiempo: **4 h**

Sistema B:

Energía útil: **8 kWh**

Energía consumida: **9 kWh**

Tiempo: **5 h**

Actividades:

1. Calcula la eficiencia de A.
2. Calcula la eficiencia de B.
3. Calcula la potencia útil media de A.
4. Calcula la potencia útil media de B.
5. Determina cuál sistema es más eficiente.
6. Determina cuál realiza la transferencia útil de energía más rápidamente.
7. Explica por qué una evaluación puede producir recomendaciones diferentes según el criterio elegido.

Interpretación: explica por qué comparar sistemas requiere definir primero qué característica se desea optimizar.

Actividad integradora. Evaluación energética de dos máquinas

Situación: una empresa debe elegir entre dos máquinas capaces de realizar la misma tarea útil.

Datos:

Máquina A:

Energía de entrada por ciclo: **12 kWh**

Eficiencia: **80 %**

Duración del ciclo: **2 h**

Máquina B:

Energía de entrada por ciclo: **10 kWh**

Eficiencia: **90 %**

Duración del ciclo: **2,5 h**

Actividades:

1. Calcula la energía útil entregada por A.
2. Calcula la energía útil entregada por B.
3. Calcula la energía no útil de cada máquina.
4. Calcula el porcentaje no útil de cada una.
5. Calcula la potencia media de entrada de A.
6. Calcula la potencia media de entrada de B.
7. Calcula la potencia útil media de cada máquina.
8. Compara las eficiencias.
9. Compara los consumos por ciclo.
10. Compara los tiempos de funcionamiento.

11. Determina cuál posee menor pérdida de energía.
12. Explica qué máquina seleccionarías si el criterio principal fuera eficiencia.
13. Explica qué información adicional necesitarías para tomar una decisión económica completa.

Interpretación: redacta una conclusión en la que utilices razones, porcentajes, energía y potencia para comparar los sistemas sin reducir la decisión a un único valor numérico.

Idea fundamental

Las razones y los porcentajes permiten comparar sistemas aunque trabajen con cantidades diferentes de energía, potencia o tiempo.

La eficiencia expresa qué fracción de la energía suministrada se convierte en energía útil, mientras que los porcentajes permiten analizar pérdidas, mejoras y reducciones de consumo.

Una comparación rigurosa exige distinguir entre eficiencia, potencia, consumo, ahorro y porcentaje de cambio, ya que cada concepto responde a una pregunta diferente sobre el comportamiento energético de un sistema.

4.7. Energía en la vida cotidiana

Consumo eléctrico, transporte, actividad humana y uso responsable de recursos

La energía está presente en prácticamente todas las actividades cotidianas. Iluminar una vivienda, cargar un teléfono, cocinar, utilizar transporte, subir escaleras, practicar un deporte o mantener en funcionamiento una institución educativa implica transferencias y transformaciones de energía.

Comprender estos procesos permite interpretar el consumo, comparar alternativas y tomar decisiones basadas en relaciones físicas y matemáticas. En este contexto, conceptos como potencia, tiempo, energía, eficiencia, rapidez y trabajo adquieren una aplicación directa.

4.7.1. Consumo eléctrico en el hogar

Los dispositivos eléctricos suelen indicar su potencia en watts o kilowatts. La energía consumida depende tanto de la potencia como del tiempo de funcionamiento.

Puede calcularse mediante:

$$E = Pt$$

Cuando la potencia se expresa en kilowatts y el tiempo en horas, la energía se obtiene en kilowatt-hora.

Ejemplo explicado

Un televisor de:

$$P = 0,12 \text{ kW}$$

funciona durante:

$$t = 5 \text{ h}$$

El consumo es:

$$E = 0,12 \times 5$$

$$E = 0,60 \text{ kWh}$$

Si se utiliza todos los días durante 30 días:

$$E = 0,60 \times 30$$

$$E = 18 \text{ kWh}$$

Ejercicio 1. Consumo mensual de un electrodoméstico

Situación: un ventilador se utiliza diariamente durante varias horas.

Datos:

Potencia: **P = 80 W**

Tiempo de uso diario: **6 h**

Número de días: **30**

Actividades:

1. Convierte la potencia a kilowatts.
2. Calcula el consumo diario en kWh.
3. Calcula el consumo mensual.
4. Determina el consumo si se utilizara solamente 4 h diarias.
5. Calcula la reducción mensual de energía.
6. Determina el porcentaje de reducción respecto del consumo inicial.

Interpretación: explica cómo una reducción del tiempo de funcionamiento puede disminuir el consumo aunque la potencia del dispositivo permanezca igual.

4.7.2. Comparación entre dispositivos eléctricos

Dos dispositivos que cumplen una función semejante pueden presentar diferentes potencias y consumos.

Sin embargo, una potencia menor no significa automáticamente mayor eficiencia. Es necesario considerar también la cantidad de energía útil producida.

Ejemplo explicado

Dos lámparas proporcionan una iluminación semejante.

Lámpara A:

$$P = 60 \text{ W}$$

Lámpara B:

$$P = 10 \text{ W}$$

Si ambas funcionan durante 5 h:

Consumo de A:

$$E = 0,060 \times 5$$

$$E = 0,30 \text{ kWh}$$

Consumo de B:

$$E = 0,010 \times 5$$

$$E = 0,05 \text{ kWh}$$

La diferencia es:

$$0,25 \text{ kWh}$$

por cada 5 h de funcionamiento.

Ejercicio 2. Comparación del consumo de iluminación

Situación: una habitación puede iluminarse mediante dos dispositivos que proporcionan un nivel de iluminación adecuado para la misma actividad.

Datos:

Dispositivo A: **P = 75 W**

Dispositivo B: **P = 12 W**

Uso diario: **5 h**

Periodo de análisis: **30 días**

Actividades:

1. Calcula el consumo mensual del dispositivo A.
2. Calcula el consumo mensual del dispositivo B.
3. Determina la diferencia de consumo.
4. Calcula el porcentaje de reducción utilizando B respecto de A.
5. Calcula el ahorro energético durante un año.

6. Explica qué información adicional sería necesaria para comparar completamente ambos dispositivos.

Interpretación: explica por qué comparar únicamente la potencia nominal no siempre es suficiente para evaluar la eficiencia de dos tecnologías.

4.7.3. Energía y transporte

El transporte requiere energía para producir movimiento. Automóviles, motocicletas, autobuses, bicicletas eléctricas y otros sistemas utilizan distintas fuentes energéticas.

Una de las variables importantes es la energía cinética del vehículo:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Esta relación muestra que aumentar la rapidez incrementa la energía cinética de manera cuadrática.

Ejemplo explicado

Un automóvil de 1 000 kg circula a:

$$v = 10 \text{ m/s}$$

Su energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}(1\,000)(10^2)$$

$$E_c = 50\,000 \text{ J}$$

Si aumenta a:

$$v = 20 \text{ m/s}$$

entonces:

$$E_c = 200\,000 \text{ J}$$

La rapidez se duplica, pero la energía cinética se cuadruplica.

Ejercicio 3. Energía cinética en el transporte

Situación: un automóvil circula a dos rapidezces diferentes.

Datos:

Masa: $m = 1\,200 \text{ kg}$

Rapidez A: $v = 15 \text{ m/s}$

Rapidez B: $v = 25 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Calcula la energía cinética en la situación A.
2. Calcula la energía cinética en la situación B.
3. Compara ambas energías.
4. Determina cuántas veces aumenta la energía.
5. Calcula el aumento porcentual de energía cinética.
6. Explica por qué el aumento no es proporcional al aumento de rapidez.

Interpretación: relaciona el resultado con las mayores exigencias de frenado que aparecen cuando aumenta la rapidez de un vehículo.

4.7.4. Energía en el desplazamiento humano

El cuerpo humano transforma energía química almacenada en los alimentos en diferentes formas de energía asociadas con movimiento, trabajo mecánico y producción de calor.

Cuando una persona asciende unas escaleras, aumenta su energía potencial gravitatoria.

El incremento puede calcularse mediante:

$$\Delta E_p = mgh$$

Ejemplo explicado

Una persona de 60 kg asciende 5 m.

Utilizando:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

el aumento de energía potencial es:

$$\Delta E_p = 60 \times 9,8 \times 5$$

$$\Delta E_p = 2\,940 \text{ J}$$

Este valor representa el cambio de energía mecánica gravitatoria del sistema, no toda la energía metabólica consumida por el cuerpo.

Ejercicio 4. Ascenso por escaleras

Situación: una estudiante asciende hasta un piso superior mediante escaleras.

Datos:

Masa: $m = 55 \text{ kg}$

Altura vertical: $h = 7 \text{ m}$

Tiempo empleado: $t = 12 \text{ s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula el aumento de energía potencial gravitatoria.
2. Determina el trabajo mecánico asociado con el ascenso.
3. Calcula la potencia mecánica media.
4. Determina qué potencia resultaría si realizara el mismo ascenso en 20 s.
5. Compara ambos resultados.

Interpretación: explica por qué realizar la misma tarea en menos tiempo requiere mayor potencia aunque el cambio de energía potencial sea igual.

4.7.5. Potencia en la actividad física

La potencia permite comparar qué tan rápidamente se realiza una tarea mecánica.

Dos personas pueden elevar la misma masa a la misma altura y realizar aproximadamente el mismo trabajo, pero quien lo haga en menos tiempo desarrolla mayor potencia mecánica.

Ejercicio 5. Comparación de potencia durante una actividad

Situación: dos estudiantes suben la misma caja hasta una plataforma.

Datos:

Masa de la caja: $m = 20 \text{ kg}$

Altura: $h = 1,5 \text{ m}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Estudiante A: $t = 3 \text{ s}$

Estudiante B: $t = 5 \text{ s}$

Actividades:

1. Calcula el trabajo realizado contra la gravedad.
2. Calcula la potencia media de A.
3. Calcula la potencia media de B.
4. Determina cuál desarrolla mayor potencia.
5. Calcula la diferencia entre las potencias.
6. Explica por qué el trabajo realizado es el mismo.

Interpretación: diferencia entre realizar más trabajo y realizar el mismo trabajo con mayor potencia.

4.7.6. Energía en la preparación de alimentos

Los procesos de calentamiento también implican transferencias de energía. Una cocina, un horno, una tetera eléctrica o un microondas utilizan energía para producir cambios en los alimentos o aumentar su temperatura.

Desde una perspectiva cotidiana, pueden compararse mediante su potencia, tiempo de funcionamiento y consumo energético.

Ejemplo explicado

Un horno de:

$$P = 2 \text{ kW}$$

funciona durante:

$$t = 45 \text{ min} = 0,75 \text{ h}$$

El consumo es:

$$E = 2 \times 0,75$$

$$E = 1,5 \text{ kWh}$$

Ejercicio 6. Consumo energético durante la cocción

Situación: se utiliza un horno eléctrico para preparar alimentos.

Datos:

Potencia: **$P = 1,8 \text{ kW}$**

Tiempo de funcionamiento: **50 min**

Actividades:

1. Convierte el tiempo a horas.
2. Calcula la energía consumida.
3. Calcula el consumo si el horno funciona 30 min.
4. Determina la diferencia.
5. Calcula el porcentaje de reducción del consumo.
6. Explica qué otros factores podrían afectar la energía realmente utilizada.

Interpretación: explica por qué disminuir el tiempo de uso puede reducir el consumo, pero no necesariamente significa que el proceso sea más eficiente.

4.7.7. Consumo diario y consumo acumulado

Pequeños consumos pueden adquirir importancia cuando se mantienen durante largos períodos.

Un dispositivo de baja potencia utilizado continuamente puede consumir más energía que otro de mayor potencia empleado durante pocos minutos.

Ejemplo explicado

Dispositivo A:

$$P = 10 \text{ W}$$

funciona:

$$24 \text{ h/día}$$

Consumo diario:

$$0,010 \times 24 = 0,24 \text{ kWh}$$

Dispositivo B:

$$P = 1\,000 \text{ W} = 1 \text{ kW}$$

funciona:

$$10 \text{ min} = 1/6 \text{ h}$$

Consumo:

$$1 \times 1/6 \approx 0,167 \text{ kWh}$$

Aunque B posee una potencia mucho mayor, en esta situación consume menos energía debido a su corto tiempo de utilización.

Ejercicio 7. Potencia alta frente a uso prolongado

Situación: se comparan dos dispositivos domésticos.

Datos:

Dispositivo A:

Potencia: **15 W**

Uso: **24 h/día**

Dispositivo B:

Potencia: **1 200 W**

Uso: **12 min/día**

Actividades:

1. Calcula el consumo diario de A.
2. Calcula el consumo diario de B.
3. Determina cuál consume más energía por día.
4. Calcula el consumo mensual de cada dispositivo.
5. Compara sus potencias.
6. Explica por qué el dispositivo más potente no necesariamente presenta mayor consumo mensual.

Interpretación: explica la importancia de analizar conjuntamente potencia y tiempo de funcionamiento.

4.7.8. Uso responsable de recursos

El uso responsable de la energía implica evitar consumos innecesarios y seleccionar alternativas que permitan realizar una tarea utilizando razonablemente los recursos disponibles.

Desde la Física y las Matemáticas pueden evaluarse medidas como:

- disminuir tiempos de funcionamiento innecesarios;
- seleccionar dispositivos más eficientes;
- reducir pérdidas de energía;
- comparar consumo antes y después de una modificación;
- evaluar porcentajes de ahorro.

La decisión responsable debe basarse en datos y no únicamente en percepciones.

Ejercicio 8. Evaluación de una medida de ahorro

Situación: una institución educativa modifica sus hábitos de iluminación.

Datos:

Consumo mensual inicial: **850 kWh**

Consumo mensual después de la medida: **680 kWh**

Actividades:

1. Calcula la reducción de consumo.
2. Calcula el porcentaje de reducción.
3. Calcula el ahorro energético anual si se mantiene la nueva condición.
4. Calcula el consumo anual antes de la medida.
5. Calcula el consumo anual después de la medida.
6. Compara los resultados.

Interpretación: explica cómo los datos permiten evaluar objetivamente si una medida de ahorro energético produjo un cambio significativo.

4.7.9. Eficiencia y responsabilidad energética

Una reducción de consumo puede producirse por mayor eficiencia, menor tiempo de uso o una disminución de la actividad realizada. Estas situaciones no son equivalentes.

Por ejemplo, un dispositivo puede consumir menos porque se utiliza menos tiempo, aunque su eficiencia no haya cambiado.

Por esta razón, para afirmar que un sistema es más eficiente debe compararse la energía útil producida con la energía suministrada.

Ejercicio 9. Consumo o eficiencia

Situación: dos máquinas producen la misma cantidad de energía útil.

Datos:

Máquina A:

Energía de entrada: **12 kWh**

Energía útil: **9 kWh**

Máquina B:

Energía de entrada: **10 kWh**

Energía útil: **9 kWh**

Actividades:

1. Calcula la eficiencia de A.
2. Calcula la eficiencia de B.
3. Calcula la energía no útil de cada máquina.
4. Determina cuál consume menos energía.
5. Determina cuál es más eficiente.
6. Calcula la diferencia en puntos porcentuales entre ambas eficiencias.

Interpretación: explica por qué en este caso menor consumo y mayor eficiencia están relacionados, pero conceptualmente siguen siendo magnitudes diferentes.

Actividad integradora. Auditoría energética doméstica simplificada

Situación: una familia desea analizar parte de su consumo eléctrico mensual.

Datos:

Refrigerador: **150 W durante 10 h equivalentes por día**

Televisor: **100 W durante 5 h/día**

Computadora: **200 W durante 4 h/día**

Iluminación: **80 W durante 6 h/día**

Periodo: **30 días**

Actividades:

1. Convierte todas las potencias a kilowatts.
2. Calcula el consumo diario de cada grupo.
3. Calcula el consumo mensual de cada uno.
4. Determina el consumo mensual total.
5. Calcula qué porcentaje del consumo corresponde a cada grupo.
6. Identifica el mayor consumidor de energía.
7. Supón que el tiempo de iluminación se reduce 2 h diarias. Calcula el nuevo consumo mensual.
8. Determina el ahorro mensual.
9. Calcula el porcentaje de reducción respecto del consumo total original.
10. Propón otra modificación y estima matemáticamente su efecto.

Interpretación: redacta una conclusión basada en los datos en la que diferencies potencia, tiempo de uso, consumo y porcentaje de participación en el consumo total.

Idea fundamental

La energía utilizada en la vida cotidiana puede analizarse mediante las mismas relaciones físicas estudiadas en sistemas mecánicos y eléctricos.

Potencia, tiempo, trabajo, energía cinética, energía potencial y eficiencia permiten estudiar transporte, actividad humana y consumo doméstico. El análisis matemático ayuda a comparar alternativas y a fundamentar decisiones relacionadas con el uso responsable de los recursos.

4.8. Problemas integradores de energía

Resolución de situaciones reales mediante principios físicos y modelos matemáticos

Los problemas relacionados con energía pueden involucrar simultáneamente movimiento, fuerzas, trabajo, potencia, eficiencia y transformaciones energéticas.

Resolver una situación integradora requiere identificar qué formas de energía intervienen, qué información se conserva, qué cantidades cambian y qué modelo matemático resulta apropiado.

No existe una única fórmula capaz de resolver todos los problemas. La elección depende de la estructura física de la situación.

4.8.1. De la altura a la rapidez

Cuando un objeto desciende sin pérdidas apreciables de energía, la disminución de energía potencial gravitatoria puede transformarse en energía cinética.

Ejemplo explicado

Un objeto parte del reposo desde una altura de 5 m.

Si se desprecia el rozamiento:

$$E_{p,i} = E_{c,f}$$

Entonces:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

La masa aparece en ambos lados y puede simplificarse:

$$gh = \frac{1}{2}v^2$$

Por tanto:

$$v = \sqrt{(2gh)}$$

Con:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$h = 5 \text{ m}$$

se obtiene:

$$v \approx 9,90 \text{ m/s}$$

Ejercicio 1. Descenso por una pista sin rozamiento

Situación: un carrito parte del reposo desde una determinada altura y desciende por una pista ideal.

Datos:

Masa: $m = 4 \text{ kg}$

Altura inicial: $h = 8 \text{ m}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Rapidez inicial: $v_i = 0 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Calcula la energía potencial inicial.
2. Calcula la energía cinética inicial.
3. Determina la energía mecánica.
4. Calcula la energía cinética al llegar al nivel de referencia.
5. Determina la rapidez final.
6. Explica por qué la masa se simplifica al calcular la rapidez.

Interpretación: explica qué condiciones deben cumplirse para utilizar directamente la conservación de la energía mecánica.

4.8.2. Energía y frenado

Un vehículo en movimiento posee energía cinética. Para detenerlo, las fuerzas de frenado deben realizar un trabajo neto negativo igual al cambio de energía cinética.

Si el vehículo termina en reposo:

$$W_{\text{neto}} = -E_{c,i}$$

Ejemplo explicado

Un automóvil de 1 000 kg circula a 20 m/s.

Energía cinética inicial:

$$E_{c,i} = \frac{1}{2}(1\,000)(20^2)$$

$$E_{c,i} = 200\,000\text{ J}$$

Para detenerse, debe disminuir su energía cinética en 200 000 J.

Ejercicio 2. Trabajo de frenado de un automóvil

Situación: un automóvil se desplaza por una carretera y posteriormente se detiene.

Datos:

Masa: $m = 1\,200\text{ kg}$

Rapidez inicial: $v_i = 22\text{ m/s}$

Rapidez final: $v_f = 0\text{ m/s}$

Distancia de frenado: $d = 55\text{ m}$

Actividades:

1. Calcula la energía cinética inicial.
2. Calcula la energía cinética final.
3. Determina el cambio de energía cinética.

4. Calcula el trabajo neto realizado durante el frenado.
5. Suponiendo una fuerza de frenado constante y opuesta al movimiento, calcula su magnitud media.
6. Explica el signo del trabajo.

Interpretación: relaciona energía cinética, trabajo y distancia de frenado dentro de la situación.

4.8.3. Potencia necesaria para elevar una carga

Una máquina puede utilizar energía para aumentar la energía potencial gravitatoria de una carga.

El trabajo útil es:

$$W_{\text{útil}} = mgh$$

y la potencia útil:

$$P_{\text{útil}} = mgh/t$$

Si la máquina no es completamente eficiente, la potencia de entrada debe ser mayor que la potencia útil.

Ejercicio 3. Sistema de elevación con eficiencia

Situación: un montacargas eleva una carga verticalmente.

Datos:

Masa total: $m = 800 \text{ kg}$

Altura: $h = 10 \text{ m}$

Tiempo: $t = 20 \text{ s}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Eficiencia: $\eta = 80 \%$

Actividades:

1. Calcula el trabajo útil.
2. Calcula la potencia útil.
3. Convierte la eficiencia a forma decimal.
4. Calcula la potencia de entrada necesaria.
5. Determina la energía de entrada durante los 20 s.
6. Calcula la energía no transformada en energía útil.

Interpretación: explica por qué una máquina real necesita recibir más energía que el aumento de energía potencial de la carga

4.8.4. Resorte y lanzamiento

La energía almacenada en un resorte puede transformarse en energía cinética.

En un sistema ideal:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Ejemplo explicado

Un resorte de:

$$k = 400 \text{ N/m}$$

se comprime:

$$x = 0,10 \text{ m}$$

Energía elástica:

$$E_{p,e} = \frac{1}{2}(400)(0,10^2)$$

$$E_{p,e} = 2 \text{ J}$$

Si impulsa una masa de 0,25 kg:

$$2 = \frac{1}{2}(0,25)v^2$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

Ejercicio 4. Lanzamiento mediante un resorte

Situación: un resorte comprimido impulsa un bloque sobre una superficie horizontal sin rozamiento.

Datos:

Constante elástica: $k = 500 \text{ N/m}$

Compresión: $x = 0,12 \text{ m}$

Masa: $m = 0,40 \text{ kg}$

Actividades:

1. Calcula la energía potencial elástica inicial.
2. Determina la energía cinética máxima del bloque.
3. Calcula la rapidez máxima.
4. Calcula qué rapidez tendría si la compresión aumentara al doble.
5. Compara las dos rapidez.
6. Explica por qué duplicar la deformación no duplica la energía.

Interpretación: relaciona la dependencia cuadrática de la energía elástica con el cambio producido en la rapidez del bloque.

4.8.5. Sistema con rozamiento

Cuando existe rozamiento, parte de la energía mecánica se transforma en energía interna.

Una forma de expresar el balance es:

$$E_{m,i} = E_{m,f} + E_{\text{disipada}}$$

Ejemplo explicado

Un bloque posee inicialmente 300 J de energía mecánica.

Al final conserva:

$$220 \text{ J}$$

Entonces:

$$E_{\text{disipada}} = 300 - 220$$

$$E_{\text{disipada}} = 80 \text{ J}$$

Ejercicio 5. Descenso con pérdidas de energía

Situación: un carrito desciende por una pista donde existe rozamiento.

Datos:

Masa: $m = 5 \text{ kg}$

Altura inicial: $h = 6 \text{ m}$

Rapidez inicial: 0 m/s

Rapidez final: $v = 8 \text{ m/s}$

Altura final: 0 m

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Actividades:

1. Calcula la energía mecánica inicial.
2. Calcula la energía cinética final.
3. Determina la energía mecánica final.
4. Calcula la energía mecánica transformada en otras formas.
5. Determina qué porcentaje de la energía inicial fue transformado.
6. Determina qué porcentaje permaneció como energía mecánica.

Interpretación: explica por qué el sistema puede cumplir la conservación general de la energía aunque la energía mecánica disminuya.

4.8.6. Comparación de medios de transporte mediante energía

La comparación entre medios de transporte puede involucrar masa, rapidez, energía cinética, consumo y eficiencia.

Un vehículo más pesado o más rápido puede requerir una mayor cantidad de energía para modificar su estado de movimiento.

Ejercicio 6. Comparación energética de dos vehículos

Situación: dos vehículos circulan con diferentes masas y rapidez.

Datos:

Vehículo A:

Masa: $m = 900 \text{ kg}$

Rapidez: $v = 20 \text{ m/s}$

Vehículo B:

Masa: $m = 1\,400 \text{ kg}$

Rapidez: $v = 15 \text{ m/s}$

Actividades:

1. Calcula la energía cinética del vehículo A.
2. Calcula la energía cinética del vehículo B.
3. Determina cuál posee mayor energía cinética.
4. Calcula la diferencia.
5. Explica si el vehículo más rápido tiene necesariamente mayor energía cinética.
6. Analiza la influencia simultánea de masa y rapidez.

Interpretación: explica por qué una comparación energética requiere considerar más de una variable.

4.8.7. Actividad humana y eficiencia

El cuerpo humano no convierte toda la energía química utilizada en trabajo mecánico externo. Parte de la energía se transforma en calor y se utiliza en procesos fisiológicos.

Puede utilizarse un modelo de eficiencia para comparar energía mecánica útil y energía total suministrada.

Ejercicio 7. Eficiencia mecánica durante un ascenso

Situación: una persona asciende una escalera y se modeliza el proceso mediante una eficiencia mecánica simplificada.

Datos:

Masa: $m = 65 \text{ kg}$

Altura: $h = 8 \text{ m}$

Gravedad: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Eficiencia mecánica idealizada: $\eta = 25 \%$

Actividades:

1. Calcula el aumento de energía potencial gravitatoria.
2. Considera ese valor como energía mecánica útil.
3. Convierte la eficiencia a forma decimal.
4. Calcula la energía total que debería suministrarse según el modelo.
5. Calcula la diferencia entre energía suministrada y energía mecánica útil.
6. Determina qué porcentaje corresponde a energía no convertida en trabajo mecánico externo.

Interpretación: explica por qué la energía utilizada por el organismo no puede identificarse únicamente con el trabajo mecánico realizado.

4.8.8. Consumo eléctrico y costo energético

El consumo eléctrico puede relacionarse con un costo cuando se conoce una tarifa por unidad de energía.

Si el precio es:

c dólares/kWh

y el consumo:

E kWh

el costo puede estimarse mediante:

$$\text{Costo} = E \times c$$

Ejercicio 8. Consumo de un equipo eléctrico

Situación: un equipo funciona diariamente durante un mes.

Datos:

Potencia: **$P = 1,2 \text{ kW}$**

Uso diario: **3 h**

Periodo: **30 días**

Tarifa utilizada para el ejercicio: **0,12 dólares/kWh**

Actividades:

1. Calcula el consumo diario.
2. Calcula el consumo mensual.
3. Calcula el costo mensual estimado.
4. Calcula el consumo si el tiempo diario se reduce a 2 h.
5. Calcula el nuevo costo.
6. Determina el ahorro mensual.
7. Calcula el porcentaje de reducción del consumo.

Interpretación: explica cómo potencia, tiempo, energía y costo forman una cadena de relaciones matemáticas aplicables a decisiones cotidianas.

4.8.9. Comparación de eficiencia y tiempo

Una máquina más eficiente puede necesitar menor energía para producir el mismo trabajo útil. Sin embargo, otra máquina puede completar la tarea en menos tiempo y desarrollar mayor potencia.

Por tanto, una comparación puede requerir varios criterios.

Ejercicio 9. Selección entre dos máquinas

Situación: dos máquinas deben elevar la misma carga hasta la misma altura.

Datos:

Trabajo útil requerido: **24 000 J**

Máquina A:

Tiempo: **20 s**

Eficiencia: **80 %**

Máquina B:

Tiempo: **30 s**

Eficiencia: **90 %**

Actividades:

1. Calcula la potencia útil de A.
2. Calcula la potencia útil de B.
3. Calcula la energía de entrada requerida por A.
4. Calcula la energía de entrada requerida por B.
5. Calcula la potencia de entrada de cada máquina.
6. Determina cuál es más eficiente.
7. Determina cuál completa la tarea más rápidamente.
8. Determina cuál requiere menor energía de entrada.

Interpretación: explica por qué la elección de una máquina depende del criterio que se considere prioritario.

4.8.10. Validación de resultados energéticos

Un resultado matemático debe comprobarse antes de aceptarse.

En problemas de energía conviene revisar:

- las unidades;
- los signos;
- las conversiones entre W y kW;
- la diferencia entre potencia y energía;
- la relación entre J y kWh;
- la razonabilidad del porcentaje de eficiencia;
- las condiciones utilizadas para aplicar conservación de energía.

Una eficiencia mayor que 100 % en una máquina que solamente transforma la energía recibida, por ejemplo, indica un error en los datos, en el cálculo o en la interpretación del sistema.

Ejercicio 10. Detección de incoherencias

Situación: se presentan diferentes resultados obtenidos al analizar sistemas energéticos.

Datos:

A. Máquina: $\eta = 85 \%$

B. Dispositivo: $\eta = 0,92$

C. Máquina: $\eta = 125 \%$

D. Consumo mensual: **45 kWh**

E. Potencia de un aparato: **1,5 kW**

Actividades:

1. Convierte la eficiencia B a porcentaje.
2. Identifica el resultado que requiere revisión inmediata.
3. Explica por qué.

4. Diferencia las magnitudes representadas por kWh y kW.
5. Determina qué información adicional se necesita para calcular energía a partir de una potencia.

Interpretación: explica por qué la validación física y dimensional forma parte de la resolución y no debe realizarse únicamente después de terminar los cálculos.

Actividad integradora. Análisis energético de un sistema de transporte vertical

Situación: un elevador transporta personas desde la planta baja hasta un piso superior. Se desea analizar el proceso desde el punto de vista de la energía, potencia y eficiencia.

Datos:

Masa total del elevador y pasajeros: **$m = 750 \text{ kg}$**

Altura recorrida: **$h = 18 \text{ m}$**

Tiempo de ascenso: **$t = 30 \text{ s}$**

Gravedad: **$g = 9,8 \text{ m/s}^2$**

Eficiencia del sistema: **$\eta = 82 \%$**

Número de viajes diarios: **20**

Días de funcionamiento mensual: **25**

Actividades:

1. Calcula el aumento de energía potencial gravitatoria en un viaje.
2. Determina el trabajo útil realizado.
3. Calcula la potencia útil media.
4. Convierte la eficiencia a forma decimal.
5. Calcula la energía de entrada necesaria por viaje.
6. Calcula la energía no transformada en energía útil por viaje.
7. Calcula la energía de entrada diaria.
8. Calcula la energía de entrada mensual.
9. Convierte el resultado mensual de joules a kWh utilizando **$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$** .
10. Calcula el porcentaje de energía no útil.
11. Determina cómo cambiaría la potencia útil si el mismo ascenso se realizara en 20 s.
12. Explica qué ocurriría con la energía útil requerida si únicamente cambiara el tiempo de ascenso.
13. Analiza qué mejora produciría aumentar la eficiencia al 90 % manteniendo el mismo trabajo útil.

Interpretación: redacta una conclusión en la que relaciones energía potencial, trabajo, potencia, eficiencia, tiempo y consumo. Explica por qué el análisis de una situación real requiere utilizar conjuntamente varios principios físicos y herramientas matemáticas.

Idea fundamental

Los problemas integradores de energía muestran que trabajo, energía cinética, energía potencial, potencia y eficiencia forman parte de un mismo marco físico.

Una situación real puede requerir transformar unidades, despejar ecuaciones, utilizar porcentajes, comparar razones, aplicar conservación de la energía y evaluar la coherencia de los resultados.

Resolver estos problemas significa comprender **qué energía entra al sistema, cómo se transforma, qué parte resulta útil, cuánto tiempo requiere el proceso y bajo qué condiciones el modelo matemático utilizado representa adecuadamente la situación física.**

CAPÍTULO 5. DATOS, EXPERIMENTACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CIENTÍFICOS

5.1. Del problema cotidiano al problema científico

Observación, formulación de preguntas y construcción de problemas investigables

La investigación científica comienza muchas veces con una situación cotidiana. Un objeto tarda más en caer que otro, una bebida se enfría con diferente rapidez según el recipiente, una bicicleta requiere más esfuerzo al subir una pendiente o una planta crece de manera distinta bajo diferentes condiciones de iluminación. Estas situaciones pueden despertar curiosidad, pero para convertirse en problemas científicos deben formularse de manera que puedan ser observadas, medidas, comparadas y analizadas.

La Física y las Matemáticas permiten transformar una pregunta cotidiana en un problema investigable mediante la identificación de magnitudes, variables y relaciones cuantificables.

5.1.1. La observación como punto de partida

Observar científicamente no significa solamente mirar. Implica prestar atención de manera intencionada a un fenómeno, identificar características relevantes y registrar información que posteriormente pueda analizarse.

Una observación puede ser cualitativa cuando describe propiedades sin utilizar valores numéricos.

Por ejemplo:

“El agua del recipiente metálico parece enfriarse más rápido que la del recipiente plástico.”

También puede ser cuantitativa cuando incorpora mediciones:

“Después de 10 min, el agua del recipiente metálico está a 42 °C y la del recipiente plástico a 48 °C.”

La segunda observación proporciona información que puede compararse matemáticamente.

Ejemplo explicado

Supongamos que dos pelotas de diferente masa se dejan caer desde la misma altura.

Una observación inicial podría ser:

“Ambas parecen llegar al suelo casi al mismo tiempo.”

Para transformar esta impresión en información científica sería necesario medir, por ejemplo:

- altura de caída;

- tiempo de caída;
- masa de cada pelota;
- condiciones del experimento.

Ejercicio 1. De la observación cotidiana al registro científico

Situación: un estudiante observa que una botella con agua colocada al sol aumenta su temperatura durante la mañana.

Datos:

Temperatura inicial: **22 °C**

Temperatura después de 15 min: **25 °C**

Temperatura después de 30 min: **29 °C**

Temperatura después de 45 min: **32 °C**

Actividades:

1. Identifica el fenómeno observado.
2. Distingue qué parte de la información es cualitativa y cuál cuantitativa.
3. Identifica las magnitudes que pueden medirse.
4. Organiza los datos en una tabla.
5. Describe el patrón general observado.
6. Propón una medición adicional que podría mejorar el estudio.

Interpretación: explica por qué una observación acompañada de datos permite formular preguntas científicas más precisas.

5.1.2. De una situación general a una pregunta científica

Una pregunta científica debe ser suficientemente específica para poder investigarse mediante observaciones, mediciones o experimentos.

Una pregunta demasiado amplia como:

“¿Por qué se enfrían las cosas?”

resulta difícil de investigar directamente.

Puede reformularse como:

“¿Cómo influye el material del recipiente en la disminución de la temperatura del agua durante 30 minutos?”

La segunda pregunta identifica variables que pueden medirse.

Ejemplo explicado

Pregunta cotidiana:

“¿Por qué una bicicleta va más rápido en algunas pendientes?”

Pregunta investigable:

“¿Cómo cambia la rapidez de una bicicleta al modificar el ángulo de inclinación de una rampa, manteniendo constantes las demás condiciones?”

En esta formulación aparecen claramente:

- variable que se modifica: inclinación;
- variable que se mide: rapidez;
- condiciones que deben controlarse.

Ejercicio 2. Formulación de preguntas investigables

Situación: se presentan varias inquietudes cotidianas.

Datos:

- A. ¿Por qué algunas pelotas rebotan más?
- B. ¿Por qué una bebida se enfría?
- C. ¿Cómo influye la longitud de un resorte en su comportamiento?
- D. ¿Por qué un carrito se mueve más rápido en una rampa?

Actividades:

1. Identifica cuáles preguntas son demasiado generales.
2. Reformula cada una para que pueda investigarse mediante mediciones.
3. Incorpora al menos una variable independiente en cada pregunta.
4. Incorpora una variable dependiente.
5. Indica qué magnitud debería medirse en cada caso.

Interpretación: explica qué características hacen que una pregunta pueda considerarse científicamente investigable.

5.1.3. Identificación de variables

Una variable es una característica que puede tomar diferentes valores dentro de una investigación.

La **variable independiente** es aquella que se modifica o selecciona deliberadamente para estudiar su efecto.

La **variable dependiente** es aquella que se observa o mide como respuesta.

También existen variables que deben mantenerse controladas para evitar que afecten los resultados.

Ejemplo explicado

Pregunta:

“¿Cómo influye la altura de una rampa en el tiempo que tarda un carrito en recorrer 2 m?”

Variable independiente:

altura de la rampa

Variable dependiente:

tiempo de recorrido

Variables de control posibles:

- mismo carrito;
- misma distancia;
- misma superficie;
- mismo punto de liberación;
- mismo procedimiento de medición.

Ejercicio 3. Identificación de variables en un problema científico

Situación: se desea investigar cómo influye la masa transportada por un carrito en su aceleración cuando se aplica una fuerza constante.

Datos:

Masas consideradas: **1 kg, 2 kg, 3 kg y 4 kg**

Fuerza aplicada: **constante**

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Propón tres variables que deberían mantenerse controladas.
4. Indica qué instrumentos serían necesarios.
5. Explica qué tipo de relación matemática esperarías observar entre masa y aceleración.

Interpretación: explica por qué modificar simultáneamente varias condiciones dificultaría determinar cuál produjo los cambios observados.

5.1.4. Del tema general al problema investigable

Un tema no es todavía un problema científico.

Por ejemplo:

“Movimiento de los automóviles”

es solamente un tema.

Un problema investigable podría ser:

“¿Cómo cambia la distancia de frenado de un carrito experimental cuando aumenta su rapidez inicial?”

La diferencia es fundamental. El problema científico delimita:

- qué fenómeno se estudiará;
- qué variables se relacionarán;
- qué condiciones se considerarán;
- qué información será necesario obtener.

Ejercicio 4. Construcción de problemas investigables

Situación: se presentan varios temas generales.

Datos:

- A. Caída libre.
- B. Rozamiento.
- C. Energía eléctrica.
- D. Movimiento de un péndulo.
- E. Deformación de resortes.

Actividades:

1. Formula para cada tema una pregunta investigable.
2. Identifica la variable independiente.
3. Identifica la variable dependiente.
4. Propón al menos dos variables de control.
5. Indica qué datos deberían registrarse.
6. Selecciona cuál de los problemas podría realizarse con mayor facilidad en un laboratorio escolar.

Interpretación: explica por qué delimitar un problema facilita la planificación de una investigación.

5.1.5. Preguntas descriptivas y preguntas relacionales

No todas las investigaciones persiguen el mismo objetivo.

Una pregunta descriptiva busca caracterizar un fenómeno.

Por ejemplo:

“¿Cómo cambia la temperatura de una bebida durante 20 minutos?”

Una pregunta **relacional** busca determinar cómo se vinculan dos variables.

Por ejemplo:

“¿Cómo influye la temperatura inicial de una bebida en su rapidez de enfriamiento?”

Las preguntas relacionales permiten construir modelos matemáticos entre variables.

Ejercicio 5. Clasificación de preguntas científicas

Situación: analiza las siguientes preguntas.

Datos:

- A. ¿Cómo cambia la posición de un carrito durante 10 s?
- B. ¿Cómo influye la inclinación de una rampa en la aceleración de un carrito?
- C. ¿Cuál es la temperatura de una habitación durante la mañana?
- D. ¿Cómo cambia la deformación de un resorte al aumentar la fuerza aplicada?
- E. ¿Cuánto tiempo tarda una pelota en caer desde 2 m?

Actividades:

- 1. Clasifica cada pregunta como descriptiva o relacional.
- 2. Identifica las variables en las preguntas relacionales.
- 3. Identifica las magnitudes que deberían medirse.
- 4. Propón una representación matemática adecuada para al menos dos preguntas.
- 5. Reformula una pregunta descriptiva para convertirla en relacional.

Interpretación: explica por qué las preguntas relacionales suelen ser especialmente útiles para construir modelos matemáticos.

5.1.6. Hipótesis preliminares

Una vez formulada una pregunta puede plantearse una **hipótesis**, es decir, una explicación o predicción provisional que posteriormente será contrastada mediante datos.

Una hipótesis debe estar relacionada directamente con las variables estudiadas.

Por ejemplo:

Pregunta:

“¿Cómo influye la altura de una rampa en la rapidez final de un carrito?”

Hipótesis:

“Si aumenta la altura de la rampa, entonces aumentará la rapidez final del carrito.”

La hipótesis puede ser respaldada, modificada o rechazada a partir de los resultados.

Ejercicio 6. Formulación de hipótesis

Situación: se investigará cómo influye la longitud de un resorte en el período de oscilación de un sistema.

Datos:

Se medirán diferentes longitudes y los tiempos correspondientes a varias oscilaciones.

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Formula una hipótesis.
4. Expresa la hipótesis utilizando una estructura del tipo “si... entonces...”.
5. Explica qué datos permitirían evaluar la hipótesis.
6. Indica qué ocurriría si los resultados contradijeran la predicción.

Interpretación: explica por qué una hipótesis científica no debe considerarse una afirmación que necesariamente tiene que resultar verdadera.

Actividad integradora. Del fenómeno cotidiano al problema científico

Situación: en una vivienda se observa que los cubos de hielo se derriten a diferente velocidad dependiendo del lugar donde se colocan.

Datos:

Posibles lugares:

- mesa interior;
- ventana iluminada;
- recipiente metálico;
- recipiente plástico.

Actividades:

1. Describe el fenómeno mediante una observación inicial.
2. Formula una pregunta científica investigable.
3. Identifica la variable independiente.
4. Identifica la variable dependiente.
5. Propón al menos tres variables de control.
6. Formula una hipótesis.
7. Determina qué magnitudes deberían medirse.
8. Propón una tabla para organizar los resultados.
9. Indica qué tipo de gráfica podría utilizarse.
10. Explica qué resultado permitiría apoyar o cuestionar la hipótesis.

Interpretación: explica cómo una situación cotidiana puede transformarse progresivamente en una investigación basada en variables, mediciones y relaciones matemáticas.

Idea fundamental

Un problema científico se construye a partir de la observación, pero requiere una formulación precisa. Identificar variables, establecer condiciones y definir magnitudes medibles permite transformar preguntas generales en problemas que pueden investigarse.

La Matemática desempeña un papel esencial porque permite organizar los datos, comparar resultados y expresar cuantitativamente las relaciones encontradas.

5.2. Diseño de experiencias y experimentos

Variables, hipótesis, procedimientos, mediciones y control de condiciones

Una vez formulado un problema científico, es necesario diseñar una estrategia para obtener evidencia que permita responderlo.

Un experimento no consiste únicamente en realizar una actividad y observar qué ocurre. Requiere establecer previamente qué variable se modificará, qué se medirá, cuáles condiciones se mantendrán constantes, qué instrumentos se utilizarán y cómo se registrarán los datos.

El diseño experimental busca que los resultados obtenidos puedan interpretarse de manera clara y coherente.

5.2.1. La relación entre pregunta, hipótesis y experimento

La pregunta científica determina qué se desea conocer.

La hipótesis plantea una predicción.

El experimento proporciona datos que permiten contrastarla.

Ejemplo explicado

Pregunta:

¿Cómo influye la fuerza aplicada en la deformación de un resorte?

Hipótesis:

Si aumenta la fuerza aplicada, la deformación del resorte aumentará.

Experimento:

Se aplican diferentes fuerzas y se mide la deformación correspondiente.

Los resultados pueden organizarse:

Fuerza F (N)	Deformación x (m)
1	0,01
2	0,02
3	0,03

La tabla permite comprobar si existe una relación entre las variables.

Ejercicio 1. Relación entre pregunta, hipótesis y diseño

Situación: se desea estudiar la relación entre la masa de un objeto y el alargamiento de un resorte.

Datos:

Masas disponibles: **50 g, 100 g, 150 g y 200 g**

Instrumentos: resorte, regla y soporte.

Actividades:

1. Formula una pregunta científica.
2. Identifica la variable independiente.
3. Identifica la variable dependiente.
4. Formula una hipótesis.
5. Propón dos condiciones que deberían mantenerse constantes.
6. Diseña una tabla para registrar los resultados.

Interpretación: explica cómo cada elemento del diseño responde directamente a la pregunta de investigación.

5.2.2. Variable independiente

La variable independiente es aquella que el investigador modifica deliberadamente o selecciona en diferentes niveles.

Si se desea estudiar el efecto de la altura de una rampa sobre la rapidez de un carrito, la altura constituye la variable independiente.

Es recomendable modificar una variable principal a la vez cuando se pretende determinar su efecto sobre otra.

Ejercicio 2. Selección de la variable independiente

Situación: se desea estudiar cómo cambia el tiempo de caída de un objeto al modificar la altura desde la cual se libera.

Datos:

Alturas: **0,5 m, 1,0 m, 1,5 m y 2,0 m**

Objeto: el mismo en todas las pruebas.

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Indica sus valores.
3. Identifica la variable dependiente.
4. Propón tres condiciones que deberían mantenerse constantes.
5. Explica por qué no sería conveniente cambiar simultáneamente la masa del objeto en cada ensayo.

Interpretación: explica cómo el control de variables permite atribuir los cambios observados a una condición específica.

5.2.3. Variable dependiente

La variable dependiente constituye el resultado que se observa o mide.

Debe definirse de forma que pueda obtenerse mediante un procedimiento claro.

Por ejemplo, en una investigación sobre el efecto de una fuerza sobre la aceleración, la aceleración es la variable dependiente.

Puede obtenerse directamente mediante un sensor o calcularse a partir de datos de velocidad y tiempo.

Ejercicio 3. Determinación de la variable dependiente

Situación: se investiga cómo influye la inclinación de una rampa en el tiempo que tarda una esfera en recorrer una distancia fija.

Datos:

Ángulos de la rampa: 10° , 20° , 30° y 40°

Distancia: 2 m

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Indica la unidad adecuada para cada variable.
4. Selecciona un instrumento para medir la variable dependiente.
5. Explica cómo podría calcularse posteriormente la rapidez media.
6. Propón una tabla para registrar los datos.

Interpretación: explica cómo una variable medida directamente puede utilizarse para calcular otras magnitudes derivadas.

5.2.4. Variables de control

Las **variables de control** son condiciones que se mantienen constantes para reducir explicaciones alternativas de los resultados.

Si se estudia el efecto de la masa en la aceleración de un carrito, podría mantenerse constante:

- la fuerza aplicada;
- la pista;
- el carrito;
- el punto de partida;
- el instrumento de medición.

Un buen experimento busca que la variable independiente sea la principal diferencia sistemática entre los ensayos.

Ejercicio 4. Control de condiciones experimentales

Situación: se investiga cómo influye el tipo de superficie en la distancia recorrida por un carrito antes de detenerse.

Datos:

Superficies:

- madera;
- cartón;
- tela;
- plástico.

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Propón cuatro variables de control.
4. Explica por qué la velocidad inicial debe mantenerse aproximadamente constante.
5. Indica qué ocurriría si se utilizara un carrito diferente en cada superficie.
6. Propón un procedimiento para garantizar condiciones comparables.

Interpretación: explica por qué el control experimental es necesario para interpretar correctamente las diferencias observadas.

5.2.5. Elaboración del procedimiento

El procedimiento debe describir las acciones necesarias de manera ordenada y suficientemente clara para que otra persona pueda reproducir la experiencia.

Un procedimiento adecuado debe indicar:

- preparación del sistema;
- valores de la variable independiente;
- forma de realizar las mediciones;
- número de repeticiones;
- condiciones que deben mantenerse;
- forma de registrar los datos.

Ejemplo explicado

Para investigar la deformación de un resorte:

1. Instalar el resorte en un soporte.
2. Medir su longitud inicial.
3. Aplicar una fuerza conocida.
4. Medir la nueva longitud.
5. Calcular la deformación.
6. Repetir para diferentes fuerzas.
7. Realizar varias mediciones.
8. Registrar los valores en una tabla.

Ejercicio 5. Construcción de un procedimiento experimental

Situación: se desea estudiar cómo cambia el período de un péndulo al modificar su longitud.

Datos:

Longitudes: **0,25 m, 0,50 m, 0,75 m y 1,00 m**

Número de oscilaciones por medición: **10**

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Redacta un procedimiento ordenado.
4. Incluye cómo se medirá el tiempo.
5. Explica cómo se calculará el período de una oscilación.
6. Indica al menos tres condiciones que deberían mantenerse constantes.

Interpretación: explica por qué medir varias oscilaciones puede ser más conveniente que medir solamente una.

5.2.6. Repetición de mediciones

Las mediciones experimentales presentan variaciones. Por ello, repetir una medición permite obtener información sobre su estabilidad y calcular valores representativos.

Supongamos que se mide un tiempo cinco veces:

2,41 s

2,37 s

2,43 s

2,39 s

2,40 s

La media puede utilizarse como una estimación representativa.

Ejercicio 6. Repetición y promedio

Situación: se mide cinco veces el tiempo de recorrido de un carrito.

Datos:

1,82 s

1,79 s

1,84 s

1,81 s

1,80 s

Actividades:

1. Organiza los datos.
2. Calcula la media.
3. Identifica el valor máximo.
4. Identifica el valor mínimo.
5. Calcula el rango.
6. Determina si existe alguna medición claramente diferente.

Interpretación: explica por qué repetir un experimento mejora la información disponible sobre el fenómeno.

5.2.7. Tablas para registrar datos

Una tabla experimental debe diseñarse antes de comenzar las mediciones siempre que sea posible.

Debe incluir:

- nombre o símbolo de cada magnitud;
- unidades;
- número de ensayo cuando corresponda;
- valores calculados si son relevantes.

Por ejemplo:

Fuerza F (N)	Medición 1 x (cm)	Medición 2 x (cm)	Medición 3 x (cm)	Promedio x (cm)
2	1,0	1,1	1,0	1,03
4	2,0	1,9	2,1	2,00

La organización facilita el análisis posterior.

Ejercicio 7. Diseño de una tabla experimental

Situación: se medirá la temperatura de un líquido cada 5 min durante 30 min.

Datos:

Intervalos: **0, 5, 10, 15, 20, 25 y 30 min**

Se realizarán tres experiencias.

Actividades:

1. Diseña una tabla que permita registrar las tres mediciones para cada instante.
2. Incluye una columna para la temperatura promedio.
3. Coloca correctamente las unidades.
4. Identifica la variable independiente.
5. Identifica la variable dependiente.
6. Explica qué gráfica podría construirse posteriormente.

Interpretación: explica cómo un buen diseño de tabla facilita tanto la medición como el análisis matemático posterior.

5.2.8. Predicciones y contraste de hipótesis

Una hipótesis debe contrastarse con los datos.

Si se predice una proporcionalidad directa, no basta con observar que ambas variables aumentan. Es necesario analizar matemáticamente si su razón permanece aproximadamente constante.

Ejemplo explicado

Hipótesis:

La deformación de un resorte es directamente proporcional a la fuerza aplicada.

Datos:

F (N)	x (cm)
2	1
4	2
6	3
8	4

La razón:

F/x

permanece constante.

Esto proporciona evidencia compatible con la hipótesis dentro del intervalo estudiado.

Ejercicio 8. Contraste de una hipótesis mediante datos

Situación: se propone que la distancia recorrida por un móvil es directamente proporcional al tiempo.

Datos:

Tiempo t (s)	Distancia d (m)
1	3,1
2	6,0
3	9,2
4	12,1
5	14,9

Actividades:

1. Calcula d/t para cada fila.
2. Compara los resultados.
3. Determina si la razón es aproximadamente constante.
4. Propón un valor representativo de la constante.
5. Construye una expresión matemática aproximada.
6. Decide si los datos respaldan razonablemente la hipótesis.

Interpretación: explica por qué los resultados experimentales no necesitan ser idénticos a los valores ideales para proporcionar evidencia compatible con un modelo.

Actividad integradora. Diseño completo de un experimento

Situación: se desea investigar cómo influye la inclinación de una rampa en la aceleración de un carrito.

Datos:

Ángulos propuestos: 5° , 10° , 15° , 20° y 25°

Distancia de recorrido: **2 m**

Mismo carrito para todos los ensayos.

Actividades:

1. Formula la pregunta científica.
2. Formula una hipótesis.
3. Identifica la variable independiente.
4. Identifica la variable dependiente.
5. Propón al menos cuatro variables de control.
6. Selecciona los instrumentos necesarios.
7. Redacta un procedimiento.
8. Determina cuántas repeticiones realizarías para cada ángulo.
9. Diseña una tabla de datos.
10. Explica cómo calcularías la aceleración.

11. Indica qué tipo de gráfica construirías.
12. Explica cómo utilizarías los resultados para evaluar la hipótesis.

Interpretación: explica cómo un diseño experimental convierte una pregunta científica en un procedimiento capaz de producir datos analizables y conclusiones fundamentadas.

Idea fundamental

Diseñar un experimento implica establecer una relación coherente entre pregunta, hipótesis, variables, procedimiento y mediciones.

El control de condiciones y la repetición de medidas permiten mejorar la calidad de la evidencia. Posteriormente, las herramientas matemáticas permiten identificar patrones, construir modelos y evaluar si los resultados respaldan las predicciones formuladas.

5.3. Medición, incertidumbre y error experimental

Precisión, exactitud, error absoluto, error relativo y error porcentual

Toda medición experimental presenta limitaciones. Ningún instrumento permite conocer una magnitud con precisión infinita, y diferentes mediciones de una misma cantidad pueden producir valores ligeramente distintos.

Por esta razón, el análisis científico no debe tratar una medición como un número absolutamente exacto. Es necesario considerar la resolución del instrumento, la variabilidad de los resultados y la diferencia entre los valores medidos y los valores de referencia.

La Matemática proporciona herramientas para cuantificar estas diferencias y evaluar la calidad de las mediciones.

5.3.1. Medición y resolución del instrumento

La **resolución** de un instrumento corresponde al menor cambio que puede distinguirse con él.

Una regla graduada en milímetros permite distinguir cambios menores que una regla graduada solamente en centímetros.

Un cronómetro que muestra:

0,01 s

posee una resolución distinta de otro que muestra únicamente:

1 s

La forma de expresar un resultado debe ser coherente con la capacidad del instrumento utilizado.

Ejemplo explicado

Si una regla permite medir hasta milímetros, una longitud podría registrarse como:

12,4 cm

pero no sería razonable afirmar, basándose únicamente en ese instrumento:

12,400037 cm

porque las cifras adicionales no están respaldadas por la medición.

Ejercicio 1. Resolución de instrumentos

Situación: se dispone de diferentes instrumentos de medición.

Datos:

Regla A: divisiones de **1 cm**

Regla B: divisiones de **1 mm**

Cronómetro A: resolución de **1 s**

Cronómetro B: resolución de **0,01 s**

Actividades:

1. Identifica qué regla permite medir longitudes con mayor detalle.
2. Identifica qué cronómetro posee mayor resolución.
3. Explica qué instrumento utilizarías para medir el tiempo de caída de una pelota.
4. Explica qué instrumento utilizarías para medir una longitud de 12,6 cm.
5. Propón una situación donde la regla A podría ser suficiente.
6. Explica por qué una mayor resolución no garantiza automáticamente una medición correcta.

Interpretación: diferencia entre la capacidad de un instrumento para distinguir pequeños cambios y la calidad global de una medición.

5.3.2. Exactitud

La **exactitud** se relaciona con qué tan próximo se encuentra un valor medido respecto de un valor aceptado o de referencia.

Supongamos que una masa patrón posee un valor de:

100,0 g

Una balanza registra:

100,2 g

La medición se encuentra muy próxima al valor de referencia y puede considerarse bastante exacta.

Si otra balanza registra:

112 g

la medición presenta una diferencia mucho mayor.

Ejercicio 2. Evaluación de exactitud

Situación: se mide una masa patrón cuyo valor de referencia es conocido.

Datos:

Valor de referencia: **250,0 g**

Medición A: **249,8 g**

Medición B: **251,1 g**

Medición C: **260,0 g**

Actividades:

1. Calcula la diferencia absoluta entre A y el valor de referencia.
2. Calcula la diferencia para B.
3. Calcula la diferencia para C.
4. Identifica cuál medición es más próxima al valor de referencia.
5. Ordena las mediciones desde la más exacta hasta la menos exacta.

Interpretación: explica por qué la exactitud requiere disponer de un valor de referencia con el cual comparar.

5.3.3. Precisión

La **precisión** se relaciona con la proximidad entre mediciones repetidas de una misma magnitud.

Un conjunto de valores puede ser muy preciso porque las mediciones están próximas entre sí, incluso si todas están alejadas del valor de referencia.

Ejemplo explicado

Valor de referencia:

10,00 cm

Conjunto A:

9,99 cm
10,01 cm
10,00 cm
10,02 cm

Las mediciones están próximas entre sí y próximas al valor de referencia.

Conjunto B:

10,50 cm
10,51 cm
10,49 cm
10,50 cm

Las mediciones están muy próximas entre sí, por lo que son precisas, pero están alejadas del valor de referencia y presentan menor exactitud.

Ejercicio 3. Diferenciación entre precisión y exactitud

Situación: dos grupos miden una longitud cuyo valor de referencia es 20,00 cm.

Datos:

Grupo A:

20,01 cm
19,99 cm
20,00 cm
20,02 cm

Grupo B:

20,48 cm
20,50 cm
20,49 cm
20,51 cm

Actividades:

1. Calcula la media del grupo A.
2. Calcula la media del grupo B.
3. Compara la dispersión interna de ambos conjuntos.
4. Determina cuál presenta mayor exactitud.
5. Determina si ambos pueden considerarse precisos.
6. Explica qué posible problema podría producir mediciones repetidamente cercanas a 20,50 cm.

Interpretación: explica por qué precisión y exactitud representan características diferentes de una medición.

5.3.4. Error absoluto

Cuando se conoce un valor de referencia, puede calcularse el **error absoluto**.

Se define como la magnitud de la diferencia entre el valor experimental y el valor de referencia:

$$\text{Error absoluto} = |\text{valor experimental} - \text{valor de referencia}|$$

El valor absoluto garantiza que el resultado sea no negativo.

Ejemplo explicado

Valor de referencia:

$$L_{\text{ref}} = 50,0 \text{ cm}$$

Valor experimental:

$$L_{\text{exp}} = 49,2 \text{ cm}$$

Error absoluto:

$$E_a = |49,2 - 50,0|$$

$$E_a = 0,8 \text{ cm}$$

El error absoluto conserva la misma unidad que la magnitud medida.

Ejercicio 4. Cálculo del error absoluto

Situación: se comparan mediciones experimentales con valores de referencia.

Datos:

Caso A:

Valor de referencia: **100 cm**

Valor medido: **98 cm**

Caso B:

Valor de referencia: **25,0 s**

Valor medido: **25,6 s**

Caso C:

Valor de referencia: **50,0 g**

Valor medido: **49,7 g**

Actividades:

1. Calcula el error absoluto del caso A.
2. Calcula el error absoluto del caso B.
3. Calcula el error absoluto del caso C.
4. Escribe las unidades correspondientes.
5. Compara los valores obtenidos.
6. Explica por qué no siempre es adecuado comparar directamente errores absolutos de magnitudes muy diferentes.

Interpretación: explica qué información proporciona y qué información no proporciona el error absoluto.

5.3.5. Error relativo

El error absoluto debe interpretarse en relación con el tamaño de la magnitud medida.

Por ello se utiliza el **error relativo**:

Error relativo = error absoluto / valor de referencia

El error relativo no posee unidades.

Ejemplo explicado

Supongamos:

Valor de referencia:

100 cm

Error absoluto:

2 cm

Entonces:

$E_r = 2/100$

$E_r = 0,02$

Ahora consideremos otro caso:

Valor de referencia:

10 cm

Error absoluto:

2 cm

Entonces:

$$Er = 2/10$$

$$Er = 0,20$$

Aunque el error absoluto es igual en ambos casos, el segundo representa una desviación proporcional mucho mayor.

Ejercicio 5. Comparación mediante error relativo

Situación: dos mediciones presentan el mismo error absoluto.

Datos:

Medición A:

Valor de referencia: **200 cm**

Error absoluto: **4 cm**

Medición B:

Valor de referencia: **20 cm**

Error absoluto: **4 cm**

Actividades:

1. Calcula el error relativo de A.
2. Calcula el error relativo de B.
3. Compara ambos resultados.
4. Determina cuál medición presenta mayor desviación proporcional.
5. Explica por qué el error absoluto por sí solo podría producir una comparación engañosa.

Interpretación: explica qué ventaja ofrece utilizar una razón para comparar errores correspondientes a escalas diferentes.

5.3.6. Error porcentual

El **error porcentual** expresa el error relativo como porcentaje.

Se calcula mediante:

$$\text{Error porcentual} = \text{error relativo} \times 100$$

o directamente:

$$\text{Error porcentual} = (\text{error absoluto} / \text{valor de referencia}) \times 100$$

Ejemplo explicado

Valor de referencia:

50,0 N

Valor experimental:

48,5 N

Error absoluto:

$E_a = 1,5 \text{ N}$

Error relativo:

$E_r = 1,5/50$

$E_r = 0,03$

Error porcentual:

$E\% = 0,03 \times 100$

$E\% = 3 \%$

Ejercicio 6. Cálculo del error porcentual

Situación: se mide experimentalmente una magnitud conocida.

Datos:

Valor de referencia: **80,0 cm**

Valor experimental: **76,8 cm**

Actividades:

1. Calcula el error absoluto.
2. Calcula el error relativo.
3. Calcula el error porcentual.
4. Expresa correctamente cada resultado.
5. Determina qué porcentaje del valor de referencia representa la diferencia.
6. Explica qué ocurriría con el error porcentual si el error absoluto se redujera a la mitad.

Interpretación: explica por qué el error porcentual facilita la comunicación de la magnitud relativa de una desviación.

5.3.7. Comparación de resultados experimentales mediante porcentajes

El error porcentual permite comparar la calidad relativa de mediciones de diferentes magnitudes.

Ejemplo explicado

Experimento A:

Error absoluto: **0,5 m**

Valor de referencia: **50 m**

Error porcentual:

1 %

Experimento B:

Error absoluto: **0,2 m**

Valor de referencia: **2 m**

Error porcentual:

10 %

Aunque B tiene menor error absoluto, presenta mayor error relativo.

Ejercicio 7. ¿Qué medición presenta menor error?

Situación: tres estudiantes realizan diferentes mediciones.

Datos:

A:

Referencia: **100 g**

Medición: **98 g**

B:

Referencia: **500 g**

Medición: **493 g**

C:

Referencia: **20 g**

Medición: **19,5 g**

Actividades:

1. Calcula el error absoluto de A.
2. Calcula el error porcentual de A.
3. Repite los cálculos para B.
4. Repite los cálculos para C.
5. Ordena las mediciones desde el menor hasta el mayor error porcentual.
6. Compara este orden con el obtenido utilizando solamente errores absolutos.

Interpretación: explica por qué el error porcentual puede resultar más adecuado para comparar mediciones de diferentes escalas.

5.3.8. Incertidumbre en mediciones repetidas

Cuando se realizan varias mediciones, su dispersión proporciona información sobre la incertidumbre experimental.

Un procedimiento sencillo para estimar la variación consiste en utilizar el rango:

Rango = valor máximo – valor mínimo

También puede expresarse una estimación a partir de la mitad del rango:

Incertidumbre aproximada = rango/2

Ejemplo explicado

Mediciones:

5,1 s
5,3 s
5,2 s
5,0 s
5,2 s

Valor máximo:

5,3 s

Valor mínimo:

5,0 s

Rango:

0,3 s

Una estimación sencilla de incertidumbre sería:

$\pm 0,15$ s

Ejercicio 8. Estimación sencilla de incertidumbre

Situación: se mide repetidamente el tiempo de un movimiento.

Datos:

2,42 s
2,38 s
2,45 s
2,40 s
2,39 s

Actividades:

1. Calcula la media.
2. Identifica el valor máximo.
3. Identifica el valor mínimo.
4. Calcula el rango.
5. Calcula la mitad del rango.
6. Expresa el resultado aproximadamente en la forma $\text{media} \pm \text{incertidumbre}$.

Interpretación: explica qué significa comunicar una medición junto con un intervalo de incertidumbre.

5.3.9. Errores sistemáticos y aleatorios

Las diferencias experimentales pueden tener distintas causas.

Los **errores aleatorios** producen variaciones impredecibles entre mediciones repetidas. Pueden estar relacionados con pequeñas fluctuaciones o con la respuesta humana al medir.

Los **errores sistemáticos** desplazan repetidamente las mediciones en una misma dirección. Por ejemplo, una balanza mal calibrada podría añadir siempre 5 g.

Repetir mediciones ayuda a estudiar la variabilidad aleatoria, pero no necesariamente elimina un error sistemático.

Ejercicio 9. Identificación del tipo de error

Situación: se presentan tres casos experimentales.

Datos:

- A. Un cronómetro manual produce tiempos ligeramente diferentes en cada repetición.
- B. Una balanza añade siempre aproximadamente 10 g al valor real.
- C. Una regla comienza a utilizarse desde una marca desgastada que desplaza todas las mediciones.

Actividades:

1. Clasifica cada caso como principalmente aleatorio o sistemático.
2. Explica la causa.
3. Determina cuál podría reducirse realizando muchas repeticiones.
4. Indica cuál requiere revisar o calibrar el instrumento.
5. Propón una estrategia de mejora para cada situación.

Interpretación: explica por qué identificar la fuente del error es más útil que limitarse a calcular su valor numérico.

5.3.10. Cifras significativas y coherencia del resultado

Los resultados calculados a partir de mediciones no deberían expresarse con una precisión aparente mucho mayor que la de los datos originales.

Si una longitud se mide como:

2,4 m

no sería razonable presentar un cálculo derivado como:

5,76000000 m²

sin considerar la precisión de los datos.

En un nivel introductorio, debe evitarse incluir un número excesivo de cifras decimales que no estén respaldadas por las mediciones.

Ejercicio 10. Presentación coherente de resultados

Situación: se calcula el área de una superficie rectangular.

Datos:

Longitud: **4,2 m**

Ancho: **2,1 m**

Actividades:

1. Calcula el área.
2. Identifica cuántas cifras significativas poseen las medidas originales.
3. Expresa el resultado con una precisión coherente.
4. Compara el resultado con escribir 8,820000 m².
5. Explica por qué añadir decimales no aumenta automáticamente la calidad de una medición.

Interpretación: explica la diferencia entre precisión matemática del cálculo y precisión experimental de los datos utilizados.

Actividad integradora. Evaluación completa de una medición experimental

Situación: un grupo de estudiantes intenta determinar el valor de una longitud patrón cuyo valor de referencia es 50,00 cm.

Datos:

Mediciones:

49,7 cm
49,8 cm
49,6 cm
49,9 cm
49,7 cm

Valor de referencia: **50,00 cm**

Actividades:

1. Calcula la media de las mediciones.
2. Determina el valor máximo.
3. Determina el valor mínimo.
4. Calcula el rango.
5. Calcula una estimación sencilla de incertidumbre mediante la mitad del rango.
6. Calcula el error absoluto de la media respecto del valor de referencia.
7. Calcula el error relativo.
8. Calcula el error porcentual.
9. Evalúa la precisión observando la dispersión de las mediciones.
10. Evalúa la exactitud comparando la media con el valor de referencia.
11. Determina si los datos podrían sugerir la presencia de un pequeño error sistemático.
12. Propón dos mejoras para el procedimiento experimental.

Interpretación: redacta una conclusión en la que diferencies claramente precisión, exactitud, incertidumbre y error, y expliques por qué todos estos conceptos son necesarios para evaluar la calidad de una medición científica.

Idea fundamental

Medir no significa obtener un valor absolutamente exacto. Toda medición está limitada por el instrumento, el procedimiento y las condiciones experimentales.

La precisión permite evaluar la proximidad entre mediciones repetidas; la exactitud indica qué tan próximo está un resultado de un valor de referencia; el error absoluto expresa la diferencia en las mismas unidades de la magnitud; el error relativo compara esa diferencia con el tamaño del valor de referencia; y el error porcentual comunica esa relación en forma de porcentaje.

Comprender estas herramientas permite interpretar los resultados experimentales con mayor rigor y evita presentar las mediciones como valores perfectos cuando, en realidad, toda evidencia experimental posee un grado de incertidumbre.

5.4. Estadística aplicada a experimentos físicos

Media, mediana, rango, dispersión e interpretación de resultados

En un experimento físico es habitual obtener varias mediciones de una misma magnitud. Aunque el procedimiento se realice cuidadosamente, los resultados no suelen ser exactamente iguales. Una persona puede medir varias veces el período de un péndulo y obtener valores ligeramente diferentes; un sensor puede registrar pequeñas variaciones de temperatura; o diferentes ensayos de un carrito pueden producir tiempos próximos, pero no idénticos.

Estas diferencias forman parte del trabajo experimental. Para analizarlas no basta con seleccionar una medición y descartar las demás. Es necesario utilizar herramientas estadísticas que permitan resumir los datos, describir su variabilidad y evaluar qué tan representativos son los resultados obtenidos.

La Estadística y la Física se integran así en el análisis experimental: las mediciones proporcionan evidencia acerca del fenómeno y las herramientas matemáticas permiten organizarla, compararla e interpretarla.

5.4.1. Organización inicial de los datos

Antes de realizar cálculos estadísticos es conveniente organizar los datos obtenidos.

Supongamos que se mide cinco veces el tiempo que tarda un carrito en recorrer una pista:

2,14 s

2,09 s

2,12 s

2,11 s

2,16 s

Los datos pueden ordenarse de menor a mayor:

2,09 s; 2,11 s; 2,12 s; 2,14 s; 2,16 s

Este orden permite observar con mayor facilidad la distribución de los valores, identificar los extremos y posteriormente determinar medidas como la mediana y el rango.

Ejemplo explicado

Consideremos seis mediciones de longitud:

15,2 cm; 15,4 cm; 15,3 cm; 15,2 cm; 15,5 cm; 15,3 cm

Ordenadas:

15,2 cm; 15,2 cm; 15,3 cm; 15,3 cm; 15,4 cm; 15,5 cm

Los datos se concentran alrededor de 15,3 cm y presentan una variación relativamente pequeña.

Ejercicio 1. Organización y lectura inicial de datos experimentales

Situación: un grupo mide repetidamente el tiempo de recorrido de una esfera.

Datos:

1,84 s; 1,79 s; 1,82 s; 1,81 s; 1,86 s; 1,80 s

Actividades:

1. Ordena los datos de menor a mayor.
2. Identifica el valor mínimo.
3. Identifica el valor máximo.
4. Determina cuántas mediciones se realizaron.
5. Identifica los valores que se encuentran en la zona central del conjunto.
6. Describe cualitativamente si los resultados parecen muy dispersos o relativamente próximos.

Interpretación: explica por qué organizar los datos constituye un paso previo importante antes de calcular medidas estadísticas.

5.4.2. Media aritmética

La **media aritmética** es una medida de tendencia central que se obtiene sumando todos los valores y dividiendo el resultado para el número total de observaciones.

Se representa frecuentemente mediante:

$$\bar{x} = \Sigma x / n$$

donde $\bar{x}$ es la media, Σx representa la suma de los valores y n es el número de mediciones.

Para comprender esta idea, observe cómo la media redistribuye el total de varias mediciones como si todas adquirieran un mismo valor representativo.



$$\bar{x} = \frac{2+4+7}{3} = \frac{13}{3} = 4 \frac{1}{3}$$

$\bar{x}$ es la media aritmética (promedio simple)

x_1	2	
x_2	4	
x_3	7	

La media no tiene que coincidir necesariamente con una de las mediciones originales. Representa un valor central calculado a partir de todas ellas.

Ejemplo explicado

Se registran los siguientes tiempos:

2,1 s; 2,3 s; 2,2 s; 2,4 s; 2,0 s

La suma es:

$$2,1 + 2,3 + 2,2 + 2,4 + 2,0 = 11,0 \text{ s}$$

Número de mediciones:

$$n = 5$$

Entonces:

$$\bar{x} = 11,0/5$$

$$\bar{x} = 2,2 \text{ s}$$

La media puede utilizarse como un valor representativo del conjunto.

Ejercicio 2. Cálculo de la media experimental

Situación: se mide seis veces la longitud de un objeto.

Datos:

24,8 cm; 25,1 cm; 24,9 cm; 25,0 cm; 25,2 cm; 24,9 cm

Actividades:

1. Calcula la suma de las seis mediciones.
2. Identifica el número total de datos.
3. Calcula la media aritmética.
4. Expresa el resultado con una precisión coherente con las mediciones.
5. Compara la media con cada valor experimental.
6. Determina si la media se encuentra dentro del intervalo definido por el mínimo y el máximo.

Interpretación: explica por qué la media suele resultar útil para resumir mediciones repetidas de una misma magnitud.

5.4.3. Mediana

La **mediana** es el valor que ocupa la posición central cuando los datos se ordenan de menor a mayor.

Si el número de datos es impar, la mediana corresponde al valor central.

Por ejemplo:

4,8; 4,9; 5,0; 5,1; 5,2

La mediana es:

5,0

Si existe un número par de datos, la mediana se obtiene calculando la media de los dos valores centrales.

Ejemplo explicado

Datos:

3,1; 3,2; 3,3; 3,5; 3,6; 3,8

Los valores centrales son:

3,3

y:

3,5

Entonces:

$$\text{Mediana} = (3,3 + 3,5)/2$$

$$\text{Mediana} = 3,4$$

La mediana puede ser especialmente útil cuando existe algún valor extremo que afecte considerablemente a la media.

Ejercicio 3. Media y mediana

Situación: se registran siete tiempos durante un experimento.

Datos:

4,9 s; 5,0 s; 5,1 s; 4,8 s; 5,2 s; 5,0 s; 6,8 s

Actividades:

1. Ordena los datos.
2. Determina la mediana.
3. Calcula la media.
4. Compara ambos resultados.
5. Identifica el valor que más se diferencia del conjunto.
6. Calcula nuevamente la media sin ese valor y compara el resultado.

Interpretación: explica por qué la mediana puede verse menos afectada que la media por un dato extremadamente diferente.

5.4.4. Rango

El **rango** es una medida sencilla de dispersión.

Se calcula mediante:

Rango = valor máximo – valor mínimo

El rango indica la amplitud total ocupada por los datos, pero no informa cómo se distribuyen los valores entre los extremos.

Ejemplo explicado

Mediciones:

10,1 cm; 10,3 cm; 10,2 cm; 10,4 cm; 10,0 cm

Valor máximo:

10,4 cm

Valor mínimo:

10,0 cm

Rango:

$10,4 - 10,0 = 0,4 \text{ cm}$

Un rango pequeño indica que los valores extremos están próximos entre sí.

Ejercicio 4. Comparación mediante el rango

Situación: dos grupos miden el mismo intervalo de tiempo.

Datos:

Grupo A:

2,10 s; 2,12 s; 2,08 s; 2,11 s; 2,09 s

Grupo B:

1,90 s; 2,30 s; 2,05 s; 2,20 s; 2,00 s

Actividades:

1. Calcula el rango del grupo A.
2. Calcula el rango del grupo B.
3. Compara ambos resultados.
4. Identifica qué grupo presenta menor dispersión según el rango.
5. Calcula la media de cada grupo.
6. Determina si medias semejantes necesariamente implican dispersiones semejantes.

Interpretación: explica por qué dos conjuntos con valores centrales parecidos pueden poseer diferente calidad experimental.

5.4.5. Dispersión de los datos

La **dispersión** describe cuánto se separan los valores respecto de una tendencia central.

El rango proporciona una primera aproximación, pero utiliza únicamente los valores extremos. Para análisis más completos pueden emplearse otras medidas, como la varianza o la desviación estándar.

La idea central consiste en comparar cada dato con la media.

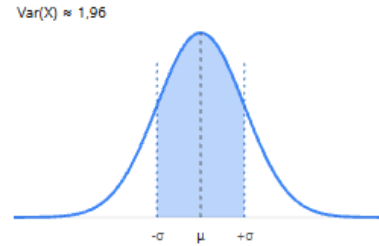
Si los valores se encuentran muy próximos a ella, la dispersión es pequeña. Si están ampliamente separados, la dispersión es mayor.

La varianza formaliza esta idea utilizando las desviaciones respecto de la media elevadas al cuadrado.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = (1,4)^2 = 1,96$$

σ 1,4



Observe que las diferencias se elevan al cuadrado. Esto evita que desviaciones positivas y negativas se cancelen y hace que los valores alejados de la media tengan mayor influencia.

Ejemplo conceptual

Conjunto A:

9,9; 10,0; 10,1

Conjunto B:

8,0; 10,0; 12,0

Ambos poseen una media de:

10,0

Sin embargo, el segundo conjunto presenta mucha mayor dispersión.

Por tanto, conocer únicamente la media no basta para describir completamente los resultados experimentales.

Ejercicio 5. Igual media, distinta dispersión

Situación: se comparan dos series de mediciones.

Datos:

Serie A:

19,8 cm; 20,0 cm; 20,2 cm

Serie B:

18,0 cm; 20,0 cm; 22,0 cm

Actividades:

1. Calcula la media de la serie A.
2. Calcula la media de la serie B.
3. Calcula el rango de cada serie.

4. Compara la dispersión.
5. Determina cuál conjunto muestra mayor consistencia entre mediciones.
6. Explica por qué la media por sí sola no permite decidir cuál conjunto es más preciso.

Interpretación: relaciona la dispersión de las mediciones con el concepto experimental de precisión.

5.4.6. Influencia de datos atípicos

Un **dato atípico** es un valor considerablemente alejado del comportamiento general del conjunto.

No debe eliminarse automáticamente. Primero es necesario analizar posibles causas, como un error de registro, una variación real del fenómeno o una condición experimental diferente.

Ejemplo explicado

Datos:

3,20 s; 3,18 s; 3,22 s; 3,19 s; 5,80 s

El valor 5,80 s merece revisión porque se encuentra muy alejado de los demás.

Puede compararse la media con y sin ese dato para estudiar su influencia.

Ejercicio 6. Efecto de un dato atípico

Situación: se registra seis veces la temperatura de un sistema bajo condiciones aparentemente constantes.

Datos:

35,1 °C; 35,2 °C; 35,0 °C; 35,1 °C; 39,8 °C; 35,2 °C

Actividades:

1. Ordena los datos.
2. Calcula la media utilizando todos los valores.
3. Determina la mediana.
4. Identifica el dato aparentemente atípico.
5. Calcula la media sin ese valor.
6. Compara las dos medias.
7. Propón posibles explicaciones para la diferencia.

Interpretación: explica por qué un dato atípico debe investigarse antes de decidir si se excluye de un análisis.

5.4.7. Estadística y repetibilidad experimental

Cuando un procedimiento produce resultados poco dispersos en sucesivas repeticiones realizadas bajo las mismas condiciones, se dice que posee buena repetibilidad.

La comparación de medias, rangos y dispersiones permite evaluar esta característica.

Ejercicio 7. Comparación de dos procedimientos de medición

Situación: dos procedimientos se utilizan para medir el mismo tiempo.

Datos:

Procedimiento A:

1,48 s; 1,50 s; 1,49 s; 1,51 s; 1,50 s

Procedimiento B:

1,39 s; 1,60 s; 1,45 s; 1,57 s; 1,49 s

Actividades:

1. Calcula la media de A.
2. Calcula la media de B.
3. Calcula la mediana de cada conjunto.
4. Calcula el rango de ambos.
5. Identifica cuál procedimiento presenta menor dispersión.
6. Determina cuál muestra mayor repetibilidad según estos datos.

Interpretación: explica por qué la repetibilidad está relacionada con la dispersión y no únicamente con el valor medio obtenido.

5.4.8. Interpretación conjunta de medidas estadísticas

Un análisis experimental adecuado puede requerir varias medidas simultáneamente.

La media resume el centro de los datos.

La mediana proporciona otro valor central menos sensible a extremos.

El rango describe la amplitud total.

Las medidas de dispersión indican cuánto se separan los datos de su valor central.

Ninguna de estas herramientas debe interpretarse aisladamente.

Ejercicio 8. Informe estadístico de un experimento

Situación: se mide ocho veces la rapidez de un carrito en condiciones semejantes.

Datos:

3,8 m/s; 4,0 m/s; 3,9 m/s; 4,1 m/s; 3,9 m/s; 4,0 m/s; 3,8 m/s; 4,2 m/s

Actividades:

1. Ordena los datos.
2. Calcula la media.
3. Calcula la mediana.
4. Determina el máximo y el mínimo.
5. Calcula el rango.
6. Describe cualitativamente la dispersión.
7. Propón un valor representativo para comunicar el resultado.

Interpretación: redacta una conclusión breve sobre la consistencia de las mediciones utilizando más de una medida estadística.

Actividad integradora. Análisis estadístico de tiempos experimentales

Situación: un grupo estudia el período de un péndulo y realiza diez mediciones independientes.

Datos:

1,98 s; 2,01 s; 2,00 s; 1,99 s; 2,02 s; 2,00 s; 1,97 s; 2,03 s; 2,01 s; 1,99 s

Actividades:

1. Ordena las mediciones.
2. Calcula la media.
3. Calcula la mediana.
4. Determina el valor máximo.
5. Determina el valor mínimo.
6. Calcula el rango.
7. Analiza la dispersión respecto de la media.
8. Determina si existe algún valor claramente atípico.
9. Propón una forma adecuada de comunicar el resultado experimental.
10. Explica cómo cambiaría tu evaluación si una medición adicional fuera 2,80 s.

Interpretación: redacta una conclusión en la que expliques por qué el análisis estadístico permite describir la calidad y estabilidad de un conjunto de mediciones físicas.

Idea fundamental

La Estadística permite transformar un conjunto de mediciones en información científicamente interpretable. La media y la mediana ayudan a identificar valores centrales, mientras que el rango y otras medidas de dispersión permiten evaluar cuánto varían los resultados.

Un valor promedio sin información sobre la dispersión puede ocultar diferencias importantes. Por ello, el análisis experimental debe considerar simultáneamente la tendencia central y la variabilidad de las mediciones.

5.5. Representación gráfica y análisis de tendencias

Construcción e interpretación de gráficos a partir de datos experimentales

Los datos experimentales adquieren una nueva dimensión cuando se representan gráficamente. Una tabla permite consultar valores concretos, pero una gráfica facilita la identificación de tendencias, relaciones entre variables, cambios de comportamiento y datos que se apartan del patrón general.

Construir una gráfica científica no consiste únicamente en colocar puntos. Es necesario decidir qué variable corresponde a cada eje, seleccionar escalas apropiadas, incluir las unidades y analizar posteriormente el significado físico de la forma obtenida.

5.5.1. Variable independiente y eje horizontal

En una investigación experimental, la variable independiente suele representarse en el eje horizontal.

Por ejemplo, si se estudia cómo cambia la temperatura con el tiempo:

Eje horizontal:

tiempo t (min)

Eje vertical:

temperatura T ($^{\circ}\text{C}$)

Cada medición se representa mediante un par ordenado:

(t, T)

Ejemplo explicado

Datos:

Tiempo t (min)	Temperatura T ($^{\circ}\text{C}$)
0	20
5	25
10	30
15	35

Los puntos correspondientes son:

$(0, 20)$, $(5, 25)$, $(10, 30)$, $(15, 35)$

La representación muestra una tendencia creciente.

Ejercicio 1. Preparación de una gráfica experimental

Situación: se estudia el movimiento de un carrito.

Datos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	0,0
1	2,1
2	4,0
3	6,2
4	8,1
5	10,0

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Determina qué magnitud corresponde al eje horizontal.
4. Determina qué magnitud corresponde al eje vertical.
5. Escribe los pares ordenados.
6. Representa los puntos.
7. Describe la tendencia general.

Interpretación: explica qué información puede reconocerse con mayor facilidad en una gráfica que en la tabla original.

5.5.2. Elección de la escala

Una escala adecuada debe permitir representar todos los datos y aprovechar razonablemente el espacio disponible.

Si los tiempos varían entre 0 y 10 s, una escala de 1 s por división puede resultar adecuada.

Si los valores de temperatura se encuentran entre 20 °C y 25 °C, una escala vertical excesivamente amplia, por ejemplo de 0 °C a 500 °C, ocultaría las pequeñas variaciones.

La escala debe facilitar la lectura sin distorsionar la información.

Ejercicio 2. Selección de escalas adecuadas

Situación: se registran temperaturas durante un experimento.

Datos:

Temperatura mínima: **18,2 °C**

Temperatura máxima: **24,6 °C**

Tiempo total: **30 min**

Mediciones cada: **5 min**

Actividades:

1. Propón una escala adecuada para el eje temporal.
2. Propón una escala para la temperatura.
3. Explica por qué no sería conveniente utilizar un eje vertical entre 0 °C y 1 000 °C.
4. Indica si el eje vertical debe necesariamente comenzar en cero.
5. Explica cómo una escala mal seleccionada puede dificultar la interpretación.

Interpretación: explica por qué la escala modifica la apariencia visual de los datos sin cambiar los valores experimentales originales.

5.5.3. Tendencia lineal

Una tendencia es **lineal** cuando los datos se aproximan a una recta.

Esto suele indicar que la variable dependiente cambia aproximadamente a una tasa constante respecto de la variable independiente.

Ejemplo explicado

Consideremos:

Fuerza F (N)	Deformación x (cm)
2	1,0
4	2,1
6	3,0
8	4,1
10	5,0

Los puntos se encuentran próximos a una recta.

El modelo aproximado podría ser:

$$x \approx 0,5F$$

Las pequeñas diferencias corresponden a la variabilidad experimental.

Ejercicio 3. Identificación de una tendencia lineal

Situación: se registra la distancia recorrida por un objeto.

Datos:

Tiempo t (s) Distancia d (m)

1	3,0
2	6,1
3	8,9

Tiempo t (s) Distancia d (m)

4 12,2

5 15,0

Actividades:

1. Representa los datos.
2. Determina si parecen distribuirse alrededor de una recta.
3. Calcula la razón d/t para cada punto.
4. Obtén una tasa representativa aproximada.
5. Propón una ecuación lineal sencilla.
6. Utiliza el modelo para estimar d cuando $t = 7$ s.

Interpretación: explica por qué un modelo lineal puede ser útil aunque los puntos experimentales no estén exactamente sobre una misma recta.

5.5.4. Pendiente de una tendencia lineal

La pendiente expresa la tasa de cambio de una variable respecto de otra.

Puede calcularse mediante:

$$m = \Delta y / \Delta x$$

Su significado físico depende de las magnitudes representadas.

En una gráfica posición-tiempo, la pendiente representa velocidad.

En una gráfica fuerza-deformación, puede relacionarse con la constante elástica dependiendo de qué variable se coloque en cada eje.

Ejemplo explicado

Si una tendencia pasa aproximadamente por:

(1 s, 4 m)

y:

(5 s, 20 m)

la pendiente es:

$$m = (20 - 4) / (5 - 1)$$

$$m = 4 \text{ m/s}$$

Ejercicio 4. Interpretación física de la pendiente

Situación: se construye una gráfica de posición frente al tiempo.

Datos:

Punto A: (2 s, 7 m)

Punto B: (8 s, 31 m)

Actividades:

1. Calcula Δx de la gráfica, correspondiente al cambio de tiempo.
2. Calcula Δy , correspondiente al cambio de posición.
3. Calcula la pendiente.
4. Escribe su unidad.
5. Interpreta físicamente el resultado.
6. Construye una ecuación aproximada si la posición inicial es -1 m.

Interpretación: explica por qué las unidades de la pendiente son fundamentales para determinar su significado físico.

5.5.5. Tendencias no lineales

No todos los fenómenos producen rectas.

Una relación cuadrática puede producir una curva parabólica. Una proporcionalidad inversa puede generar una curva decreciente. Otros fenómenos pueden presentar comportamientos más complejos.

Por ejemplo:

Tiempo t (s) Distancia d (m)

0	0
1	2
2	8
3	18
4	32

Estos datos corresponden a:

$$d = 2t^2$$

La gráfica es curva y la pendiente cambia continuamente.

Ejercicio 5. Reconocimiento de una tendencia cuadrática

Situación: se obtienen datos de posición para un movimiento acelerado.

Datos:

Tiempo t (s) Posición x (m)

0	0
1	3
2	12
3	27
4	48

Actividades:

1. Representa los puntos.
2. Determina si forman aproximadamente una recta.
3. Calcula x/t^2 para los valores distintos de cero.
4. Identifica la regularidad.
5. Propón un modelo de segundo grado.
6. Predice la posición para $t = 5$ s.

Interpretación: explica qué característica matemática permite reconocer una tendencia cuadrática.

5.5.6. Gráficos de dispersión experimental

Cuando se desea estudiar la relación entre dos variables medidas, los resultados pueden representarse como puntos independientes en un gráfico de dispersión.

No es obligatorio unir cada punto con el siguiente. En muchas investigaciones interesa observar la distribución global e identificar una **línea o curva de tendencia**.

Ejemplo explicado

Si al aumentar una fuerza aumentan también las deformaciones, pero con pequeñas fluctuaciones experimentales, los puntos pueden distribuirse alrededor de una recta.

La línea de tendencia representa el comportamiento general, no una conexión física directa entre cada medición consecutiva.

Ejercicio 6. Datos experimentales y línea de tendencia

Situación: se estudia la relación entre fuerza y deformación.

Datos:

Fuerza F (N) Deformación x (cm)

1	0,6
2	1,1
3	1,5
4	2,1
5	2,4
6	3,1

Actividades:

1. Construye un gráfico de dispersión.
2. Describe la tendencia.
3. Determina si parece aproximadamente lineal.
4. Identifica si algún punto se aleja más que los demás de la tendencia general.
5. Propón una recta aproximada.
6. Utiliza la tendencia para predecir la deformación correspondiente a 7 N.

Interpretación: explica la diferencia entre una línea de tendencia y una línea que simplemente une todos los puntos experimentales.

5.5.7. Interpolación

La **interpolación** consiste en estimar un valor situado dentro del intervalo de datos experimentales conocidos.

Si tenemos mediciones para:

$$t = 4 \text{ s}$$

y:

$$t = 6 \text{ s}$$

estimar un valor para:

$$t = 5 \text{ s}$$

constituye una interpolación.

Generalmente, una interpolación es más confiable que una predicción muy alejada del rango experimental, siempre que la tendencia sea adecuada.

Ejercicio 7. Estimación dentro del intervalo experimental

Situación: se estudia la temperatura de un líquido.

Datos:

Tiempo t (min)	Temperatura T (°C)
0	80
5	70
10	60
15	50
20	40

Actividades:

1. Representa los datos.
2. Describe la tendencia.
3. Estima la temperatura en 7,5 min.
4. Explica por qué esta estimación constituye una interpolación.
5. Determina una ecuación lineal compatible con los datos.
6. Utiliza la ecuación para comprobar la estimación.

Interpretación: explica por qué utilizar valores comprendidos dentro del intervalo medido suele exigir menos suposiciones que predecir fuera de él.

5.5.8. Extrapolación

La **extrapolación** consiste en utilizar una tendencia para estimar valores fuera del intervalo experimental.

Si los datos fueron obtenidos entre 0 y 10 s y se utiliza el modelo para predecir el valor en 30 s, se está extrapolando.

La extrapolación debe interpretarse con precaución porque la relación observada puede dejar de cumplirse fuera del intervalo estudiado.

Ejercicio 8. Evaluación de una extrapolación

Situación: un estudiante mide la temperatura de un líquido durante los primeros 20 min y obtiene una tendencia aproximadamente lineal.

Datos:

Modelo aproximado dentro del intervalo:

$$T = 80 - 2t$$

Temperatura en °C.

Tiempo en min.

Intervalo experimental: $0 \leq t \leq 20$ min

Actividades:

1. Calcula la temperatura predicha en 15 min.
2. Clasifica este cálculo como interpolación o extrapolación.
3. Calcula la temperatura predicha en 30 min.
4. Clasifica este segundo cálculo.
5. Calcula la predicción para 50 min.
6. Analiza si el resultado parece físicamente razonable.
7. Explica qué limitación del modelo queda evidenciada.

Interpretación: explica por qué una ecuación matemáticamente válida puede generar predicciones físicamente inadecuadas cuando se utiliza fuera de su dominio experimental.

5.5.9. Comparación de tendencias

Dos conjuntos de datos pueden compararse mediante sus gráficas.

Si ambas relaciones son lineales, pueden compararse:

- sus pendientes;
- sus interceptos;
- su dispersión alrededor de la tendencia.

Ejercicio 9. Comparación gráfica de dos experimentos

Situación: dos carritos se desplazan aproximadamente con velocidad constante.

Datos:

Carrito A:

t (s) x (m)

0	0
1	2,0
2	4,1
3	5,9
4	8,0

Carrito B:

t (s) x (m)

0	1
1	4,0

t (s) x (m)

2 7,1

3 10,0

4 13,2

Actividades:

1. Representa ambos conjuntos en un mismo sistema.
2. Describe sus tendencias.
3. Estima la pendiente de A.
4. Estima la pendiente de B.
5. Determina cuál presenta mayor velocidad.
6. Compara sus posiciones iniciales.
7. Propón una ecuación aproximada para cada movimiento.

Interpretación: explica cómo pendiente e intercepto permiten comparar dos fenómenos mediante sus representaciones gráficas.

Actividad integradora. Del experimento a la tendencia

Situación: se estudia cómo cambia la deformación de un resorte al aumentar la fuerza aplicada.

Datos:

Fuerza F (N)	Deformación x (cm)
0	0,0
2	1,0
4	2,1
6	3,0
8	4,2
10	5,1

Actividades:

1. Identifica la variable independiente.
2. Identifica la variable dependiente.
3. Construye un gráfico de dispersión.
4. Describe la tendencia.
5. Determina si parece aproximadamente lineal.
6. Estima una pendiente representativa.
7. Propón una ecuación aproximada.
8. Utiliza el modelo para interpolar la deformación correspondiente a 5 N.
9. Utiliza el modelo para extrapolar la deformación correspondiente a 14 N.
10. Explica por qué la segunda predicción debe interpretarse con mayor precaución.
11. Identifica posibles diferencias entre los puntos experimentales y la tendencia ideal.

Interpretación: redacta una conclusión en la que relaciones la representación gráfica, la tendencia, la pendiente y el significado físico de los datos.

Idea fundamental

Las gráficas permiten transformar conjuntos de datos en representaciones donde las relaciones entre variables pueden identificarse visualmente.

Una tendencia lineal puede interpretarse mediante su pendiente e intercepto; una tendencia curva puede revelar relaciones cuadráticas u otros comportamientos. La interpolación permite estimar valores dentro del intervalo estudiado, mientras que la extrapolación exige mayor precaución.

Una gráfica experimental debe interpretarse siempre como una representación de datos reales, con variabilidad e incertidumbre, y no como una figura matemática perfecta.

5.6. Construcción y validación de modelos

Comparación entre predicciones matemáticas y resultados experimentales

Uno de los objetivos fundamentales de la Física consiste en construir modelos capaces de representar determinados aspectos de los fenómenos reales.

Un **modelo matemático** establece una relación entre variables mediante ecuaciones, funciones, tablas o gráficas. Su utilidad depende de la capacidad para describir los datos disponibles y realizar predicciones razonables dentro de determinadas condiciones.

Sin embargo, construir una ecuación no significa demostrar que el fenómeno siempre se comportará de esa manera. Todo modelo debe contrastarse con evidencia experimental.

5.6.1. De los datos al modelo

Supongamos que se estudia el movimiento de un carrito y se obtienen:

Tiempo t (s) Posición x (m)

0	1,0
1	4,1
2	6,9
3	10,2
4	13,0

Los datos sugieren:

- una posición inicial próxima a 1 m;
- un aumento aproximado de 3 m por segundo.

Un modelo razonable puede ser:

$$x = 1 + 3t$$

El modelo no reproduce necesariamente cada medición exactamente, pero representa la tendencia general.

Ejercicio 1. Construcción de un modelo lineal

Situación: se registran posiciones de un móvil.

Datos:

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	2,0
1	6,1
2	9,9
3	14,2
4	18,0

Actividades:

1. Estima la posición inicial.
2. Calcula los incrementos de posición.
3. Estima una velocidad representativa.
4. Propón un modelo lineal.
5. Calcula las posiciones predichas para $t = 0, 1, 2, 3$ y 4 s.
6. Compara las predicciones con los valores experimentales.

Interpretación: explica por qué un modelo puede considerarse útil aunque no reproduzca exactamente todas las mediciones.

5.6.2. Predicción matemática

Una vez construido un modelo puede utilizarse para calcular valores no medidos directamente.

Si:

$$x = 2 + 4t$$

para:

$$t = 6 \text{ s}$$

el modelo predice:

$$x = 2 + 4(6)$$

$$x = 26 \text{ m}$$

Esta predicción puede contrastarse posteriormente mediante una nueva medición.

Ejercicio 2. Del modelo a una predicción comprobable

Situación: un experimento inicial produce el modelo aproximado:

$$d = 2,5t$$

donde d se expresa en metros y t en segundos.

Datos:

Se realizará posteriormente una medición en $t = 8 \text{ s}$.

Actividades:

1. Calcula la distancia predicha para 8 s.
2. Calcula la predicción para 10 s.
3. Identifica cuál de estas predicciones podría comprobarse realizando nuevas mediciones.
4. Explica qué resultado experimental sería exactamente compatible con la primera predicción.
5. Explica por qué una pequeña diferencia no invalida necesariamente el modelo.

Interpretación: explica por qué una predicción científica debe formularse de manera que pueda compararse con observaciones posteriores.

5.6.3. Residuo o diferencia entre predicción y medición

Para evaluar un modelo puede calcularse la diferencia entre el valor experimental y el valor predicho.

Puede utilizarse:

Diferencia = valor experimental – valor predicho

El signo muestra si la medición se encuentra por encima o por debajo de la predicción.

También puede utilizarse el valor absoluto cuando interesa únicamente la magnitud de la diferencia.

Ejemplo explicado

Predicción:

10,0 m

Medición:

10,3 m

Diferencia:

$$10,3 - 10,0 = +0,3 \text{ m}$$

En otro punto:

Predicción:

15,0 m

Medición:

14,8 m

Diferencia:

$$14,8 - 15,0 = -0,2 \text{ m}$$

Las diferencias cambian de signo alrededor del modelo, algo compatible con variaciones experimentales aleatorias.

Ejercicio 3. Cálculo de diferencias modelo-experimento

Situación: se compara un modelo con mediciones.

Datos:

Tiempo t (s)	Predicción (m)	Medición (m)
1	4,0	4,1
2	8,0	7,8
3	12,0	12,2
4	16,0	15,9
5	20,0	20,3

Actividades:

1. Calcula la diferencia con signo para cada fila.
2. Calcula la diferencia absoluta.
3. Identifica la mayor diferencia absoluta.
4. Determina si todas las mediciones se encuentran por encima del modelo.
5. Describe el patrón de las diferencias.
6. Evalúa cualitativamente el ajuste del modelo.

Interpretación: explica qué información adicional proporciona analizar las diferencias y no solamente observar que los valores son “parecidos”.

5.6.4. Error porcentual en la validación

El error porcentual permite comparar una medición con una predicción o valor teórico.

Puede calcularse mediante:

$$\text{Error porcentual} = |\text{experimental} - \text{teórico}| / |\text{teórico}| \times 100$$

cuando el valor teórico utilizado como referencia es distinto de cero.

Ejemplo explicado

Valor predicho:

50 N

Valor experimental:

48 N

Error absoluto:

2 N

Error porcentual:

$$(2/50) \times 100$$

4 %

Ejercicio 4. Validación mediante error porcentual

Situación: un modelo predice el período de un sistema.

Datos:

Valor teórico: **T = 2,00 s**

Valor experimental medio: **T = 2,08 s**

Actividades:

1. Calcula el error absoluto.
2. Calcula el error relativo.
3. Calcula el error porcentual.
4. Determina qué porcentaje del valor teórico representa la diferencia.
5. Propón dos posibles causas experimentales de la diferencia.

Interpretación: explica por qué el error porcentual permite evaluar la magnitud relativa de una desviación.

5.6.5. Modelo lineal frente a modelo cuadrático

Seleccionar un modelo requiere analizar la forma de los datos.

Consideremos:

x y

0 0

1 2

2 8

3 18

4 32

Un modelo lineal no representa adecuadamente este patrón porque los incrementos de y no son constantes.

En cambio:

$$y = 2x^2$$

reproduce exactamente los datos.

La selección del modelo debe basarse en el comportamiento de las variables, no únicamente en la facilidad de utilizar una ecuación.

Ejercicio 5. Selección del tipo de modelo

Situación: se registran posiciones durante un movimiento.

Datos:

Tiempo t (s) Posición x (m)

0 1

1 3

2 9

3 19

4 33

Actividades:

1. Calcula los incrementos de posición entre datos consecutivos.
2. Determina si son constantes.
3. Calcula las segundas diferencias de los valores de posición.
4. Determina si estas son aproximadamente constantes.

5. Decide si un modelo lineal o cuadrático parece más apropiado.
6. Propón una expresión matemática sencilla compatible con los datos.

Interpretación: explica por qué analizar diferencias puede ayudar a seleccionar la estructura matemática de un modelo.

5.6.6. Validación con nuevos datos

Un modelo resulta más convincente si es capaz de predecir resultados que no fueron utilizados originalmente para construirlo.

Supongamos que se construye:

$$d = 3t$$

a partir de mediciones realizadas entre:

$$0 \text{ s y } 5 \text{ s}$$

Después se realiza una nueva medición en:

$$t = 7 \text{ s}$$

El modelo predice:

$$d = 21 \text{ m}$$

Si el resultado experimental es cercano, aumenta la evidencia de que el modelo es útil dentro de ese intervalo ampliado.

Ejercicio 6. Comprobación con una nueva medición

Situación: mediante los primeros datos de un experimento se propone:

$$x = 5 + 2t$$

Datos:

Nueva medición:

Tiempo: $t = 10 \text{ s}$

Posición experimental: $x = 24,6 \text{ m}$

Actividades:

1. Calcula la posición predicha.
2. Calcula la diferencia experimental-predicción.
3. Calcula el error porcentual tomando la predicción como referencia.
4. Determina si la nueva medición parece razonablemente compatible con el modelo.
5. Propón otra medición que sería útil realizar para continuar evaluándolo.

Interpretación: explica por qué utilizar datos nuevos constituye una prueba más exigente que comprobar únicamente los datos empleados para construir el modelo.

5.6.7. Límites de validez

Todo modelo posee un **dominio de validez**.

Un modelo construido para velocidades pequeñas puede no funcionar a velocidades extremas. Una relación elástica puede dejar de cumplirse si un resorte se deforma demasiado. Un modelo lineal de calentamiento puede fallar después de cierto tiempo.

Ejemplo explicado

Supongamos:

$$T = 20 + 3t$$

El modelo puede describir adecuadamente un calentamiento durante los primeros 10 min.

Si se utiliza para:

$$t = 100 \text{ min}$$

predice:

$$T = 320 \text{ °C}$$

Esto puede ser imposible para el sistema estudiado.

El problema no está necesariamente en el álgebra. Está en utilizar el modelo fuera de las condiciones en las que fue validado.

Ejercicio 7. Análisis de los límites de un modelo

Situación: la temperatura de un líquido se modeliza durante los primeros minutos mediante:

$$T = 25 + 4t$$

Temperatura en °C.

Tiempo en min.

Datos:

Intervalo experimental validado: **0 a 8 min**

Actividades:

1. Calcula T para $t = 5$ min.
2. Determina si el cálculo corresponde al intervalo validado.

3. Calcula T para $t = 30$ min.
4. Clasifica esta predicción como interpolación o extrapolación.
5. Explica por qué el segundo resultado requiere mayor precaución.
6. Propón una razón física por la que la tasa de calentamiento podría dejar de ser constante.

Interpretación: explica por qué debe distinguirse entre la validez matemática de una ecuación y la validez física de su aplicación.

5.6.8. Modelos ideales y sistemas reales

Los modelos físicos suelen simplificar la realidad.

Por ejemplo:

- en caída libre puede despreciarse la resistencia del aire;
- en movimiento parabólico puede suponerse gravedad constante;
- en una superficie puede despreciarse el rozamiento;
- un resorte puede tratarse como ideal;
- una partícula puede sustituir a un cuerpo extenso.

Estas simplificaciones permiten construir modelos manejables, pero deben declararse explícitamente.

Ejercicio 8. Identificación de supuestos de un modelo

Situación: se utiliza la expresión de caída libre para predecir el tiempo que tarda una hoja de papel en llegar al suelo.

Datos:

El modelo considera únicamente la aceleración gravitatoria.

El experimento se realiza en el aire.

Actividades:

1. Identifica el supuesto principal del modelo ideal.
2. Explica qué interacción real se está omitiendo.
3. Predice si los datos podrían diferir considerablemente del modelo.
4. Compara esta situación con la caída de una esfera metálica compacta.
5. Propón una modificación experimental para aproximarse mejor al modelo ideal.

Interpretación: explica por qué un modelo no debe calificarse de “incorrecto” únicamente porque la realidad incluya factores que el modelo decidió no representar.

5.6.9. Refinamiento de modelos

Cuando las diferencias entre predicciones y mediciones muestran un patrón sistemático, puede ser necesario modificar el modelo.

Por ejemplo, si un modelo lineal subestima los valores cada vez más conforme aumenta la variable independiente, podría ser necesario considerar una relación curva.

El refinamiento implica utilizar nueva evidencia para mejorar la representación matemática.

Ejemplo explicado

Modelo inicial:

$$x = 2t$$

Datos:

t (s) x experimental (m)

1 2,1

2 4,8

3 8,0

4 12,1

La diferencia aumenta sistemáticamente.

Los datos sugieren que la rapidez de cambio está aumentando, por lo que un modelo puramente lineal puede resultar insuficiente.

Ejercicio 9. Evaluación y mejora de un modelo

Situación: se propone inicialmente el modelo:

$$y = 3x$$

Datos:

x y experimental

1 3,1

2 6,4

3 10,2

4 14,8

5 20,5

Actividades:

1. Calcula los valores predichos.
2. Calcula las diferencias.
3. Determina si las diferencias parecen aumentar con x.
4. Decide si los datos muestran un patrón aleatorio o sistemático.
5. Explica qué indicaría un patrón sistemático.
6. Propón investigar un modelo no lineal como alternativa.

Interpretación: explica cómo los errores pueden proporcionar información útil para mejorar un modelo en lugar de considerarse únicamente resultados indeseables.

5.6.10. Criterios para evaluar un modelo

Un buen modelo debe valorarse mediante varios criterios:

- reproduce razonablemente los datos;
- utiliza variables físicamente significativas;
- posee unidades coherentes;
- permite realizar predicciones;
- especifica las condiciones de validez;
- puede contrastarse experimentalmente;
- mantiene un nivel de complejidad adecuado al fenómeno.

El modelo más complicado no es automáticamente el mejor. Una expresión sencilla puede ser preferible si representa suficientemente bien los datos dentro del propósito de la investigación.

Ejercicio 10. Evaluación comparativa de modelos

Situación: dos modelos se proponen para representar un conjunto experimental dentro del mismo intervalo.

Datos:

Modelo A:

$$y = 4x$$

Modelo B:

$$y = 3,98x + 0,12$$

Datos experimentales:

x y

1 4,0

2 8,1

3 11,9

x **y**

4 16,1

Actividades:

1. Calcula las predicciones de A.
2. Calcula las predicciones de B.
3. Compara las diferencias respecto de los datos.
4. Determina cuál parece ajustarse ligeramente mejor.
5. Analiza cuál modelo es más sencillo.
6. Explica qué otros criterios utilizarías para decidir cuál conservar.

Interpretación: explica por qué la selección de un modelo debe equilibrar capacidad explicativa, ajuste experimental y simplicidad.

Actividad integradora. Construcción, validación y evaluación de un modelo experimental

Situación: un grupo estudia la posición de un carrito y obtiene los siguientes datos.

Datos:

Tiempo t (s) Posición x (m)

0	2,1
1	5,0
2	8,2
3	11,1
4	14,3
5	17,2

Posteriormente se obtiene una nueva medición:

t = 7 s

x_{experimental} = 23,4 m

Actividades:

1. Representa gráficamente los primeros seis datos.
2. Identifica la tendencia.
3. Estima la posición inicial.
4. Estima la pendiente.
5. Construye un modelo lineal aproximado.

6. Calcula las posiciones predichas para los datos iniciales.
7. Calcula las diferencias entre predicción y medición.
8. Utiliza el modelo para predecir la posición en 7 s.
9. Compara la predicción con la nueva medición.
10. Calcula el error absoluto.
11. Calcula el error porcentual.
12. Evalúa si la nueva evidencia respalda razonablemente el modelo.
13. Indica el intervalo experimental en el que existe evidencia directa.
14. Explica qué riesgo implicaría utilizar el mismo modelo para predecir la posición después de varias horas.
15. Propón una nueva medición que permita seguir evaluando su validez.

Interpretación: redacta una conclusión en la que expliques la relación entre datos experimentales, tendencia gráfica, modelo matemático, predicción, error y validación.

Idea fundamental

Construir un modelo significa transformar regularidades observadas en una representación matemática capaz de describir y predecir determinados aspectos de un fenómeno.

Validarlo exige comparar sus predicciones con mediciones reales, analizar las diferencias, reconocer la incertidumbre y comprobar si continúa funcionando bajo nuevas condiciones.

Un modelo científico no debe entenderse como una copia exacta de la realidad. Es una representación fundamentada y limitada cuya utilidad depende de qué fenómeno describe, con qué precisión lo hace, dentro de qué condiciones funciona y qué evidencia experimental respalda sus predicciones.

5.7. Tecnología y simulación para estudiar fenómenos físicos

Uso educativo de simuladores, hojas de cálculo, sensores y herramientas digitales

El estudio de los fenómenos físicos se ha transformado con la incorporación de tecnologías capaces de medir, registrar, representar y analizar información con gran rapidez. En la actualidad, una investigación escolar puede combinar observaciones directas con simulaciones computacionales, sensores digitales, aplicaciones móviles y hojas de cálculo.

Estas herramientas no sustituyen el razonamiento científico. Su función es ampliar las posibilidades de observación y experimentación. Un simulador puede permitir modificar condiciones difíciles de reproducir en un laboratorio escolar; un sensor puede registrar cientos de mediciones en pocos segundos; y una hoja de cálculo puede transformar los datos obtenidos en tablas, gráficas y modelos matemáticos.

El uso científico de la tecnología requiere comprender qué se está midiendo, cuáles son las variables involucradas, qué supuestos utiliza una simulación y cómo deben interpretarse los resultados.

5.7.1. Simulación de fenómenos físicos

Una **simulación** es una representación computacional de un sistema o fenómeno construida a partir de un modelo. Permite modificar determinadas variables y observar las consecuencias previstas por ese modelo.

Por ejemplo, una simulación de movimiento puede permitir modificar:

- posición inicial;
- velocidad inicial;
- aceleración;
- tiempo;
- gravedad.

Al cambiar una variable y mantener constantes las demás, el estudiante puede estudiar relaciones de causa y efecto.

Ejemplo explicado

Supongamos una simulación de movimiento rectilíneo en la que se establece:

Posición inicial: 0 m

Velocidad: 4 m/s

Aceleración: 0 m/s²

El modelo correspondiente es:

$$x = 4t$$

Para diferentes tiempos se obtienen:

Tiempo t (s) Posición x (m)

0	0
1	4
2	8
3	12
4	16

La simulación permite visualizar el movimiento, mientras que la ecuación permite describir matemáticamente el mismo fenómeno.

Ejercicio 1. Exploración de un fenómeno mediante simulación

Situación: utiliza un simulador de movimiento rectilíneo que permita modificar la velocidad de un objeto.

Condiciones iniciales:

Posición inicial: **0 m**

Aceleración: **0 m/s²**

Velocidades que se analizarán:

2 m/s, 4 m/s y 6 m/s

Actividades:

1. Mantén constantes la posición inicial y la aceleración.
2. Ejecuta la simulación para cada velocidad.
3. Registra la posición del móvil después de 5 s.
4. Organiza los resultados en una tabla.
5. Compara las posiciones obtenidas.
6. Construye una expresión matemática para cada movimiento.
7. Explica cómo cambia la pendiente de la gráfica posición-tiempo.

Interpretación: explica qué relación existe entre velocidad, pendiente y cambio de posición.

5.7.2. Simulación y experimentación real

Una simulación y un experimento físico no son equivalentes.

En un experimento real pueden intervenir:

- rozamiento;
- resistencia del aire;
- irregularidades de los materiales;
- limitaciones instrumentales;
- errores de medición;
- variaciones ambientales.

Una simulación puede controlar o eliminar algunos de estos factores según el modelo utilizado.

Por esta razón, comparar resultados simulados con mediciones reales constituye una estrategia especialmente valiosa.

Ejemplo explicado

Una simulación ideal puede predecir que un carrito recorre:

10,0 m

en determinado intervalo.

En el experimento real se obtiene:

9,6 m

La diferencia no demuestra automáticamente que el simulador esté equivocado. Puede indicar que el modelo ideal no incorpora completamente factores presentes en el sistema real.

Ejercicio 2. Simulación frente a experimento

Situación: se estudia el desplazamiento de un carrito durante 4 s.

Datos:

Predicción de la simulación: **12,0 m**

Resultado experimental 1: **11,6 m**

Resultado experimental 2: **11,8 m**

Resultado experimental 3: **11,7 m**

Actividades:

1. Calcula la media experimental.
2. Compara la media con el resultado simulado.
3. Calcula la diferencia absoluta.
4. Calcula el error porcentual tomando la predicción como referencia.
5. Propón dos causas físicas de la diferencia.
6. Explica qué condiciones podrían modificarse para aproximar el experimento al modelo simulado.

Interpretación: determina qué información adicional proporciona comparar un sistema real con su representación computacional.

5.7.3. Modificación controlada de variables

Una ventaja importante de los simuladores consiste en permitir la modificación sistemática de variables.

Si se estudia un proyectil, por ejemplo, puede modificarse únicamente la velocidad inicial y mantener constantes:

- ángulo;
- gravedad;
- altura inicial;
- resistencia del aire.

Posteriormente puede modificarse solamente el ángulo y estudiar su efecto.

Esta estrategia permite reconocer con mayor claridad las relaciones entre magnitudes.

Ejercicio 3. Control digital de variables

Situación: utiliza una simulación de movimiento parabólico.

Condiciones:

Velocidad inicial: **20 m/s**

Gravedad: **9,8 m/s²**

Ángulos:

20°, 30°, 40°, 50° y 60°

Actividades:

1. Mantén constantes las demás condiciones.
2. Registra el alcance horizontal para cada ángulo.
3. Organiza los datos en una tabla.
4. Construye una gráfica de alcance frente al ángulo.
5. Identifica el ángulo que produce el mayor alcance entre los valores estudiados.
6. Compara los resultados correspondientes a ángulos complementarios cuando estén disponibles.
7. Formula una conclusión basada en los datos.

Interpretación: explica por qué modificar una sola variable facilita la identificación de relaciones físicas.

5.7.4. Hojas de cálculo para organizar información

Una **hoja de cálculo** permite introducir, ordenar y procesar grandes cantidades de datos experimentales.

Las columnas pueden representar variables y las filas diferentes observaciones o ensayos.

Por ejemplo:

Tiempo t (s) Posición x (m) Velocidad v (m/s)

0	0,0	2,0
1	2,1	2,0
2	4,0	2,0
3	6,1	2,0
4	7,9	2,0

Una hoja de cálculo permite calcular automáticamente:

- sumas;

- medias;
- diferencias;
- porcentajes;
- errores;
- razones;
- tendencias.

Ejemplo explicado

Supongamos cinco tiempos experimentales:

2,1 s; 2,0 s; 2,2 s; 2,1 s; 2,3 s

En una hoja de cálculo puede utilizarse una función para obtener la media de las celdas correspondientes.

Sin embargo, utilizar automáticamente una función no elimina la necesidad de comprender qué representa la media y por qué resulta pertinente calcularla.

Ejercicio 4. Análisis experimental mediante una hoja de cálculo

Situación: se registran diez mediciones del período de un péndulo.

Datos:

1,96 s; 2,01 s; 1,99 s; 2,03 s; 1,98 s; 2,00 s; 2,02 s; 1,97 s; 2,01 s; 2,00 s

Actividades:

1. Introduce los datos en una columna.
2. Calcula automáticamente la media.
3. Determina la mediana.
4. Identifica el máximo.
5. Identifica el mínimo.
6. Calcula el rango.
7. Compara los resultados con cálculos realizados manualmente.
8. Presenta el resultado experimental de manera coherente.

Interpretación: explica qué ventajas ofrece automatizar cálculos cuando aumenta la cantidad de datos.

5.7.5. Construcción digital de gráficas

Las hojas de cálculo permiten transformar datos numéricos en representaciones gráficas.

La elección del tipo de gráfica depende de la información que se desea analizar. Cuando se estudia la relación entre dos variables numéricas experimentales, un gráfico de dispersión suele ser especialmente útil.

Ejemplo explicado

Consideremos:

Fuerza F (N) Deformación x (cm)

1	0,5
2	1,0
3	1,6
4	2,0
5	2,5

Al representar fuerza y deformación mediante un gráfico de dispersión puede observarse una tendencia aproximadamente lineal.

La tecnología facilita la representación, pero corresponde al estudiante interpretar físicamente qué significa esa tendencia.

Ejercicio 5. De la hoja de cálculo al modelo gráfico

Situación: analiza los siguientes resultados.

Datos:

Tiempo t (s) Distancia d (m)

1	3,1
2	6,0
3	9,2
4	11,9
5	15,1
6	18,0

Actividades:

1. Introduce los datos en una hoja de cálculo.
2. Construye un gráfico de dispersión.
3. Añade una línea de tendencia apropiada.
4. Obtén una ecuación aproximada.
5. Interpreta físicamente la pendiente.
6. Utiliza el modelo para estimar la distancia en 7 s.
7. Compara la predicción con el patrón de los datos.

Interpretación: explica por qué generar automáticamente una ecuación no sustituye la necesidad de comprobar su coherencia física.

5.7.6. Sensores digitales

Un **sensor** transforma una característica física en información que puede registrarse y procesarse.

Existen sensores capaces de medir, entre otras magnitudes:

- temperatura;
- presión;
- posición;
- aceleración;
- intensidad luminosa;
- sonido;
- fuerza.

Muchos dispositivos de uso cotidiano incorporan sensores. Los teléfonos inteligentes, por ejemplo, pueden incluir acelerómetros, giroscopios, sensores de luz y otros componentes.

Ejemplo explicado

Un sensor de temperatura puede registrar automáticamente un valor cada segundo.

En 5 min se obtendrían:

300 mediciones

si se realiza un registro por segundo.

Esta cantidad de información permite estudiar cambios que podrían pasar inadvertidos mediante pocas mediciones manuales.

Ejercicio 6. Registro automático mediante sensores

Situación: se dispone de un sensor de temperatura para estudiar el enfriamiento de agua caliente.

Condiciones:

Duración: **10 min**

Frecuencia de registro: **una medición cada 10 s**

Actividades:

1. Calcula cuántas mediciones se obtendrán.
2. Identifica la variable independiente.
3. Identifica la variable dependiente.
4. Propón una tabla digital para almacenar los resultados.

5. Determina qué tipo de gráfica utilizarías.
6. Describe qué tendencia esperarías observar.
7. Explica qué ventajas presenta el registro automático frente a una medición manual cada 5 min.

Interpretación: relaciona la frecuencia de muestreo con el nivel de detalle con el que puede estudiarse un fenómeno.

5.7.7. Tecnología móvil en experimentos escolares

Los teléfonos y tabletas pueden utilizarse como herramientas de adquisición de datos cuando disponen de sensores adecuados.

Por ejemplo, un acelerómetro puede proporcionar información sobre el movimiento del dispositivo.

No obstante, antes de interpretar los resultados es necesario considerar:

- orientación del sensor;
- frecuencia de muestreo;
- calibración;
- unidades;
- posición del dispositivo;
- condiciones experimentales.

Ejercicio 7. Diseño de una experiencia utilizando un dispositivo móvil

Situación: se desea utilizar el acelerómetro de un teléfono para estudiar un movimiento.

Actividades:

1. Formula una pregunta investigable.
2. Identifica la variable independiente.
3. Identifica la variable dependiente.
4. Determina qué información proporcionará el sensor.
5. Propón un procedimiento seguro.
6. Indica qué condiciones deberían mantenerse constantes.
7. Explica cómo organizarías los datos obtenidos.
8. Propón una representación gráfica.

Interpretación: explica por qué disponer de un sensor no garantiza por sí mismo que los datos obtenidos sean científicamente útiles.

5.7.8. Calidad y confiabilidad de los datos digitales

Los datos obtenidos mediante dispositivos electrónicos también presentan incertidumbre.

Un sensor puede:

- poseer una resolución limitada;
- requerir calibración;

- presentar ruido;
- registrar valores atípicos;
- tener un intervalo limitado de funcionamiento.

Por tanto, los datos digitales deben evaluarse con los mismos criterios científicos aplicados a cualquier medición.

Ejercicio 8. Evaluación crítica de datos obtenidos con un sensor

Situación: un sensor registra una temperatura aproximadamente constante.

Datos:

25,1 °C; 25,2 °C; 25,1 °C; 31,8 °C; 25,0 °C; 25,2 °C; 25,1 °C

Actividades:

1. Calcula la media utilizando todos los datos.
2. Determina la mediana.
3. Identifica un posible valor atípico.
4. Calcula nuevamente la media sin ese valor.
5. Compara ambos resultados.
6. Propón una posible causa del registro anómalo.
7. Explica qué comprobación realizarías antes de eliminarlo.

Interpretación: explica por qué los datos generados automáticamente también requieren evaluación crítica.

5.7.9. Simulación como herramienta para formular hipótesis

Los simuladores pueden utilizarse no solo para comprobar conocimientos, sino también para explorar un fenómeno antes de diseñar un experimento.

El estudiante puede modificar variables, identificar patrones preliminares y formular una hipótesis que posteriormente será contrastada mediante datos reales.

Ejercicio 9. De la simulación a la hipótesis experimental

Situación: una simulación permite modificar la masa de un objeto mientras se mantiene constante la fuerza aplicada.

Actividades:

1. Selecciona cinco valores diferentes de masa.
2. Registra la aceleración correspondiente.
3. Construye una tabla.
4. Representa los datos.
5. Describe la relación observada.
6. Formula una hipótesis matemática.
7. Diseña un experimento real que permita contrastarla.

Interpretación: explica cómo una simulación puede contribuir a formular una hipótesis sin sustituir necesariamente su comprobación experimental.

5.7.10. Uso responsable de herramientas digitales

Una herramienta digital produce resultados a partir de instrucciones, datos y modelos. Por ello, el estudiante debe evitar aceptar automáticamente cualquier resultado generado.

Ante una gráfica, cálculo o simulación es necesario preguntarse:

¿Las unidades son correctas?

¿Las variables están bien definidas?

¿El resultado es físicamente posible?

¿La escala de la gráfica es apropiada?

¿El modelo representa las condiciones reales?

¿Los datos presentan valores anómalos?

Ejercicio 10. Auditoría científica de un resultado digital

Situación: una hoja de cálculo informa que un automóvil recorrió **2400 m** en **2 min** y calcula una rapidez de **1200 m/s**.

Actividades:

1. Revisa los datos.
2. Convierte correctamente el tiempo a segundos.
3. Calcula la rapidez.
4. Compara el resultado con el proporcionado por la hoja de cálculo.
5. Identifica el posible error.
6. Explica por qué el resultado automático debería haber generado sospechas.

Interpretación: explica por qué el razonamiento físico constituye una herramienta de verificación incluso cuando los cálculos son realizados digitalmente.

Actividad integradora. Laboratorio físico-digital

Situación: se investigará el movimiento de un objeto mediante una combinación de simulación, medición experimental y análisis digital.

Actividades:

1. Formula una pregunta investigable.
2. Identifica las variables.
3. Formula una hipótesis.
4. Explora inicialmente el fenómeno mediante un simulador.
5. Registra las predicciones.

6. Diseña una experiencia real.
7. Obtén varias mediciones.
8. Introduce los datos en una hoja de cálculo.
9. Calcula media, mediana y rango cuando corresponda.
10. Construye una gráfica.
11. Obtén un modelo matemático aproximado.
12. Compara los resultados reales con los simulados.
13. Calcula las diferencias.
14. Analiza posibles fuentes de error.
15. Evalúa las limitaciones de la simulación.
16. Formula una conclusión sustentada en evidencia.

Interpretación: explica qué aporta cada recurso —simulación, experimento, sensor y hoja de cálculo— al proceso de construcción del conocimiento científico.

Idea fundamental

La tecnología amplía las posibilidades de investigación de la Física, pero no reemplaza la comprensión científica. Los simuladores permiten explorar modelos; los sensores facilitan la adquisición de datos; las hojas de cálculo permiten procesarlos; y las herramientas gráficas ayudan a reconocer tendencias.

El aprendizaje ocurre cuando estos recursos se utilizan para formular preguntas, contrastar hipótesis, interpretar datos, evaluar modelos y construir explicaciones fundamentadas.

5.8. Proyecto integrador final

Diseño de una investigación en la que el estudiante plantee un problema, construya un modelo matemático, obtenga o simule datos, analice resultados y comunique conclusiones científicas

El proyecto integrador constituye la aplicación global de los conocimientos desarrollados a lo largo del libro. El propósito no consiste simplemente en resolver un problema previamente estructurado, sino en asumir el proceso de investigación desde la identificación de un fenómeno hasta la comunicación de conclusiones.

El estudiante deberá integrar Física y Matemáticas para responder una pregunta investigable mediante evidencia.

La investigación deberá incorporar:

- observación de un fenómeno;
- formulación del problema;
- pregunta científica;
- identificación de variables;
- hipótesis;
- diseño metodológico;
- mediciones o simulaciones;
- organización de datos;
- análisis estadístico;
- representación gráfica;

- construcción de un modelo matemático;
- comparación entre predicciones y resultados;
- análisis de errores e incertidumbre;
- conclusiones;
- comunicación científica.

5.8.1. Selección del fenómeno

El proyecto comienza con la elección de un fenómeno suficientemente accesible para ser investigado.

Algunas posibilidades son:

- movimiento de un objeto sobre una rampa;
- período de un péndulo;
- deformación de un resorte;
- enfriamiento de un líquido;
- caída de objetos;
- consumo de energía;
- rozamiento entre superficies;
- movimiento de un proyectil mediante simulación;
- relación entre fuerza y aceleración.

La selección debe considerar los recursos disponibles, el tiempo, la seguridad y la posibilidad de obtener datos cuantitativos.

Ejercicio 1. Selección y delimitación del fenómeno

Situación: selecciona un fenómeno físico de tu entorno que pueda estudiarse mediante mediciones o simulaciones.

Actividades:

1. Describe el fenómeno.
2. Explica dónde puede observarse.
3. Identifica al menos tres magnitudes relacionadas.
4. Determina cuáles pueden medirse.
5. Evalúa si el estudio puede realizarse de manera segura.
6. Explica por qué resulta apropiado para una investigación de Bachillerato.

Producto: descripción inicial del fenómeno seleccionado.

5.8.2. Formulación del problema

El fenómeno seleccionado debe transformarse en una pregunta concreta.

Por ejemplo, el tema:

“Péndulo”

es demasiado amplio.

Una pregunta investigable sería:

“¿Cómo influye la longitud de un péndulo en su período de oscilación?”

La pregunta identifica claramente las variables que deberán estudiarse.

Ejercicio 2. Construcción de la pregunta científica

Actividades:

1. Formula una pregunta inicial.
2. Identifica la variable independiente.
3. Identifica la variable dependiente.
4. Revisa si ambas pueden medirse.
5. Delimita las condiciones del estudio.
6. Reformula la pregunta hasta que pueda responderse mediante evidencia.

Producto: pregunta científica definitiva.

5.8.3. Formulación de la hipótesis

La hipótesis debe expresar una predicción fundamentada acerca de la relación esperada entre las variables.

No se trata de adivinar el resultado.

Debe apoyarse en conocimientos físicos y matemáticos.

Ejemplo

Pregunta:

¿Cómo influye la fuerza aplicada en la aceleración de un objeto de masa constante?

Hipótesis:

Si aumenta la fuerza neta aplicada mientras la masa permanece constante, la aceleración aumentará proporcionalmente.

Esta hipótesis puede relacionarse con:

$$F = ma$$

Ejercicio 3. Construcción de una hipótesis fundamentada

Actividades:

1. Revisa la pregunta científica.
2. Predice la relación entre las variables.
3. Redacta una hipótesis.
4. Expresa, cuando sea posible, la relación matemática esperada.

5. Justifica la hipótesis mediante un principio físico.
6. Indica qué resultado podría cuestionarla.

Producto: hipótesis y justificación científica.

5.8.4. Diseño metodológico

El estudiante debe decidir cómo obtendrá la evidencia.

Puede utilizar:

experimento físico, cuando el fenómeno pueda reproducirse de manera segura;

simulación, cuando las condiciones sean difíciles de reproducir;

o una **estrategia combinada**, cuando resulte conveniente comparar ambos tipos de datos.

Ejercicio 4. Diseño de la investigación

Actividades:

1. Define la variable independiente.
2. Define la variable dependiente.
3. Establece las variables de control.
4. Selecciona los instrumentos.
5. Define los valores de la variable independiente.
6. Determina el número de repeticiones.
7. Redacta el procedimiento.
8. Diseña previamente la tabla de datos.
9. Identifica posibles riesgos.
10. Establece medidas de seguridad.

Producto: protocolo experimental o de simulación.

5.8.5. Obtención de datos

Los datos deben registrarse de manera sistemática.

No deben modificarse para que coincidan con la hipótesis.

Si un resultado parece extraño, debe conservarse inicialmente y analizarse posteriormente.

Ejercicio 5. Registro de evidencia

Actividades:

1. Realiza el procedimiento.
2. Registra cada medición.
3. Incluye las unidades.
4. Repite los ensayos previstos.
5. Registra cualquier situación inesperada.

6. Identifica posibles datos atípicos sin eliminarlos.
7. Conserva los datos originales.

Producto: tabla completa de datos experimentales o simulados.

5.8.6. Análisis estadístico

Cuando existen mediciones repetidas, deben emplearse herramientas estadísticas apropiadas.

El análisis puede incluir:

- media;
- mediana;
- máximo;
- mínimo;
- rango;
- dispersión;
- identificación razonada de valores atípicos.

Ejercicio 6. Procesamiento estadístico de los resultados

Actividades:

1. Ordena los datos.
2. Calcula las medias necesarias.
3. Determina medianas cuando sean relevantes.
4. Calcula rangos.
5. Analiza la dispersión.
6. Identifica posibles datos atípicos.
7. Compara las diferentes series experimentales.
8. Resume los resultados en una nueva tabla.

Producto: tabla de resultados procesados.

5.8.7. Representación gráfica

Las variables principales deben representarse gráficamente.

En una investigación sobre fuerza y aceleración, por ejemplo:

Eje horizontal:

Fuerza F (N)

Eje vertical:

Aceleración a (m/s²)

La gráfica permitirá determinar si los resultados presentan una tendencia lineal, cuadrática, inversa u otro comportamiento.

Ejercicio 7. Construcción de la representación gráfica

Actividades:

1. Selecciona las variables.
2. Coloca la variable independiente en el eje horizontal.
3. Coloca la variable dependiente en el eje vertical.
4. Incluye magnitudes y unidades.
5. Selecciona escalas apropiadas.
6. Representa todos los datos.
7. Identifica la tendencia.
8. Señala posibles puntos alejados del comportamiento general.

Producto: gráfica experimental correctamente rotulada.

5.8.8. Construcción del modelo matemático

A partir de los datos y la gráfica debe proponerse una expresión matemática.

Un modelo lineal puede escribirse como:

$$y = mx + b$$

Un modelo cuadrático puede expresarse como:

$$y = ax^2 + bx + c$$

La forma seleccionada debe responder al comportamiento de los datos y tener una interpretación física.

Ejercicio 8. Del patrón experimental al modelo

Actividades:

1. Observa la forma de la gráfica.
2. Determina si la tendencia parece lineal o no lineal.
3. Calcula parámetros relevantes.
4. Propón una ecuación.
5. Comprueba las unidades.
6. Interpreta físicamente las constantes del modelo cuando sea posible.
7. Utiliza la ecuación para reproducir algunos valores experimentales.

Producto: modelo matemático acompañado de su interpretación física.

5.8.9. Predicción

Un modelo científico debe permitir realizar predicciones.

El estudiante seleccionará un valor de la variable independiente y calculará el resultado esperado.

Posteriormente, cuando sea posible, realizará una nueva medición para comprobarlo.

Ejercicio 9. Predicción y comprobación

Actividades:

1. Selecciona un valor no utilizado directamente para construir el modelo.
2. Calcula la predicción.
3. Registra el valor matemático.
4. Realiza una nueva medición o simulación.
5. Registra el resultado.
6. Calcula la diferencia absoluta.
7. Calcula el error porcentual cuando sea pertinente.
8. Evalúa la compatibilidad entre ambos resultados.

Producto: comparación cuantitativa entre predicción y evidencia.

5.8.10. Evaluación del modelo

La coincidencia exacta entre teoría y experimento no constituye el único criterio de calidad.

El estudiante deberá preguntarse:

¿El modelo representa la tendencia general?

¿Las diferencias son pequeñas respecto de las magnitudes estudiadas?

¿Existen desviaciones sistemáticas?

¿Qué supuestos utiliza?

¿Dentro de qué intervalo funciona?

¿Qué factores físicos no incorpora?

Ejercicio 10. Validación crítica

Actividades:

1. Compara valores predichos y experimentales.
2. Calcula diferencias.
3. Analiza los errores porcentuales.
4. Identifica patrones en las desviaciones.
5. Determina si existe evidencia compatible con el modelo.
6. Identifica sus principales limitaciones.
7. Define el intervalo estudiado.
8. Explica qué nuevas pruebas permitirían fortalecer o cuestionar el modelo.

Producto: evaluación argumentada de la validez del modelo.

5.8.11. Análisis de incertidumbre y fuentes de error

Todo proyecto debe reconocer sus limitaciones.

Entre las posibles fuentes de incertidumbre pueden encontrarse:

- resolución de instrumentos;
- tiempo de reacción;
- calibración;
- rozamiento;
- condiciones ambientales;
- alineación de dispositivos;
- variaciones entre ensayos;
- simplificaciones del modelo.

Ejercicio 11. Evaluación de la calidad experimental

Actividades:

1. Identifica al menos cuatro fuentes de incertidumbre.
2. Clasifícalas según su posible origen.
3. Determina cuáles podrían reducirse.
4. Explica cómo podrían afectar los resultados.
5. Propón una mejora para cada una.
6. Analiza si alguna podría producir un error sistemático.

Producto: análisis de limitaciones y propuesta de mejoras.

5.8.12. Interpretación científica

Una investigación no termina con un cálculo.

Los resultados deben utilizarse para responder la pregunta inicial.

Una conclusión científica debe indicar:

- qué se encontró;
- qué relación se observó;
- qué evidencia respalda la afirmación;
- si la hipótesis fue respaldada o cuestionada;
- qué limitaciones existieron;
- hasta dónde pueden generalizarse los resultados.

No sería suficiente escribir:

“La hipótesis fue correcta.”

Una conclusión más rigurosa podría señalar:

“Los resultados muestran que la aceleración aumentó aproximadamente de manera lineal al incrementar la fuerza aplicada dentro del intervalo estudiado. La tendencia observada es compatible con la relación $F = ma$ para una masa aproximadamente

constante, aunque las mediciones presentan pequeñas desviaciones atribuibles a las condiciones experimentales.”

Ejercicio 12. Construcción de la conclusión científica

Actividades:

1. Responde directamente la pregunta de investigación.
2. Resume la tendencia principal.
3. Incorpora al menos dos resultados cuantitativos.
4. Relaciona los resultados con el modelo.
5. Evalúa la hipótesis.
6. Reconoce las principales limitaciones.
7. Propón una investigación posterior.

Producto: conclusión científica final.

5.8.13. Comunicación de los resultados

La ciencia requiere comunicar los procedimientos y resultados de manera suficientemente clara para que otras personas puedan comprenderlos, evaluarlos y, cuando corresponda, reproducirlos.

El informe final puede organizarse mediante:

Título

Problema investigado

Pregunta científica

Hipótesis

Variables

Fundamento físico-matemático

Materiales y herramientas

Procedimiento

Datos obtenidos

Análisis estadístico

Gráficas

Modelo matemático

Predicciones y validación

Análisis de incertidumbre

Conclusiones

Limitaciones y propuestas de mejora

Ejercicio 13. Preparación del informe científico

Actividades:

1. Organiza toda la evidencia obtenida.
2. Selecciona las tablas necesarias.
3. Incorpora las gráficas relevantes.
4. Presenta las ecuaciones utilizadas.
5. Explica el significado físico de los resultados.
6. Diferencia claramente datos, cálculos e interpretaciones.
7. Redacta las conclusiones.
8. Revisa unidades, símbolos y cifras.
9. Verifica que las afirmaciones estén respaldadas por evidencia.

Producto: informe científico del proyecto.

Proyecto final. Del fenómeno real al conocimiento científico

Selecciona un fenómeno físico investigable y desarrolla una investigación completa en la que Física y Matemáticas funcionen como herramientas complementarias para comprenderlo.

El proyecto deberá incluir obligatoriamente:

Fase 1. Problema

Describe el fenómeno y formula una pregunta científica medible.

Fase 2. Hipótesis

Establece una predicción fundamentada e identifica la relación esperada entre las variables.

Fase 3. Diseño

Define variables independientes, dependientes y de control. Selecciona instrumentos, herramientas digitales y procedimientos.

Fase 4. Evidencia

Obtén datos mediante mediciones reales, simulaciones o una combinación de ambas. Realiza repeticiones cuando corresponda.

Fase 5. Procesamiento

Organiza los datos en tablas y aplica herramientas estadísticas como media, mediana, rango y medidas de dispersión pertinentes.

Fase 6. Representación

Construye gráficas apropiadas e identifica tendencias, pendientes, cambios de comportamiento y posibles datos atípicos.

Fase 7. Modelización

Construye una expresión matemática que represente razonablemente la relación observada entre las variables.

Fase 8. Predicción

Utiliza el modelo para obtener una nueva predicción cuantitativa.

Fase 9. Validación

Contrasta la predicción mediante una nueva medición o simulación y calcula las diferencias correspondientes.

Fase 10. Evaluación

Analiza precisión, incertidumbre, posibles errores y límites de validez del modelo.

Fase 11. Conclusiones

Responde la pregunta inicial utilizando evidencia cuantitativa y determina en qué medida los resultados respaldan la hipótesis.

Fase 12. Comunicación científica

Presenta el proceso completo mediante un informe, exposición o producto científico que permita comprender qué se investigó, cómo se investigó, qué resultados se obtuvieron y qué conclusiones pueden justificarse.

Preguntas finales de reflexión

1. ¿Qué observación originó la investigación?
2. ¿Cómo se transformó una situación cotidiana en un problema científico?
3. ¿Qué variables permitieron estudiar el fenómeno?
4. ¿Qué mediciones fueron necesarias?
5. ¿Qué aportó la Estadística al análisis?
6. ¿Qué información reveló la representación gráfica?
7. ¿Cómo se construyó el modelo matemático?
8. ¿Qué tan próximas fueron sus predicciones a los resultados experimentales?
9. ¿Qué incertidumbres afectaron las mediciones?
10. ¿Dentro de qué condiciones puede utilizarse el modelo?
11. ¿Qué aspectos del fenómeno quedaron fuera de la investigación?
12. ¿Qué modificarías si realizaras nuevamente el proyecto?

13. ¿Qué nueva pregunta científica surgió después de analizar los resultados?

Idea fundamental

Investigar científicamente significa mucho más que aplicar una fórmula o ejecutar un experimento. Implica **observar, preguntar, medir, organizar, representar, modelizar, predecir, contrastar, interpretar y comunicar**.

A lo largo de este proceso, la Física permite comprender los principios que explican el fenómeno, mientras que las Matemáticas proporcionan el lenguaje necesario para cuantificar relaciones, analizar datos y construir modelos.

El proyecto integrador representa, por tanto, la síntesis del enfoque interdisciplinario desarrollado en el libro: partir de un fenómeno de la realidad, transformarlo en un problema investigable y construir, mediante evidencia y razonamiento matemático, una explicación científicamente fundamentada.

Referencias

- Banda, H. J., & Nzabahimana, J. (2021). Effect of integrating physics education technology simulations on students' conceptual understanding in physics: A review of literature. *Physical Review Physics Education Research*, 17(2), 023108. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.023108>
- Bowers, J., Anderson, M., & Beckhard, K. (2024). A mathematics educator walks into a physics class: Identifying math skills in students' physics problem-solving practices. *Journal for STEM Education Research*, 7, 335–361. <https://doi.org/10.1007/s41979-023-00105-w>
- Palmgren, E., Kokkonen, T., & Bruun, J. (2025). Roles of mathematics in physics education: A systematic review. *Physical Review Physics Education Research*, 21(2), 020602. <https://doi.org/10.1103/wwww-gwp8>
- Palmgren, E., & Rasa, T. (2024). Modelling roles of mathematics in physics. *Science & Education*, 33, 365–382. <https://doi.org/10.1007/s11191-022-00393-5>
- Panorkou, N., & Germia, E. F. (2021). Integrating math and science content through covariational reasoning: The case of gravity. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(4), 318–343. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1814977>
- Phillips, A. M., Gouvea, E. J., Gravel, B. E., Beachemin, P.-H., & Atherton, T. J. (2023). Physicality, modeling, and agency in a computational physics class. *Physical Review Physics Education Research*, 19(1), 010121. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.19.010121>
- Redish, E. F. (2023). Using math in physics: 6. Reading the physics in a graph. *The Physics Teacher*, 61(8), 651–656. <https://doi.org/10.1119/5.0150860>
- Sirnoorkar, A., Bergeron, P. D. O., & Lavery, J. T. (2023). Sensemaking and scientific modeling: Intertwined processes analyzed in the context of physics problem solving. *Physical Review Physics Education Research*, 19(1), 010118. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.19.010118>
- Tong, T., Pi, F., Zheng, S., et al. (2025). Exploring the effect of mathematics skills on student performance in physics problem-solving: A structural equation modeling analysis. *Research in Science Education*, 55, 489–509. <https://doi.org/10.1007/s11165-024-10201-5>
- Urone, P. P., & Hinrichs, R. (2022). *College physics 2e*. OpenStax.
- Weller, D. P., Bott, T. E., Caballero, M. D., & Irving, P. W. (2022). Development and illustration of a framework for computational thinking practices in introductory physics. *Physical Review Physics Education Research*, 18(2), 020106. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.18.020106>
- Zhao, F., & Schuchardt, A. (2021). Development of the Sci-Math Sensemaking Framework: Categorizing sensemaking of mathematical equations in science. *International Journal of STEM Education*, 8, 10. <https://doi.org/10.1186/s40594-020-00264-x>

FÍSICA Y MATEMÁTICAS INTEGRADAS

PARA BACHILLERATO

Modelización, razonamiento científico y resolución de problemas desde un enfoque interdisciplinario

Esta obra propone una enseñanza integrada de la Física y las Matemáticas que permite comprender los fenómenos naturales, representarlos matemáticamente y resolver problemas reales con **pensamiento crítico y científico**.

A través de ejemplos contextualizados, actividades experimentales, simulaciones, ejercicios resueltos y problemas integradores, el estudiante desarrolla la capacidad de **modelizar, analizar datos, interpretar resultados** y argumentar conclusiones basadas en evidencia.

Cada capítulo conecta la teoría con situaciones de la vida cotidiana y con los desafíos del mundo actual, fomentando la curiosidad, la investigación y la toma de decisiones informadas.

El libro está dirigido a estudiantes de Bachillerato y a docentes que buscan promover aprendizajes significativos mediante una metodología activa, interdisciplinaria y centrada en el desarrollo de competencias.

Este libro ofrece:



Enfoque interdisciplinario que articula conceptos físicos y matemáticos.



Actividades de modelización y experimentación para comprender la realidad.



Problemas contextualizados para desarrollar razonamiento y pensamiento crítico.

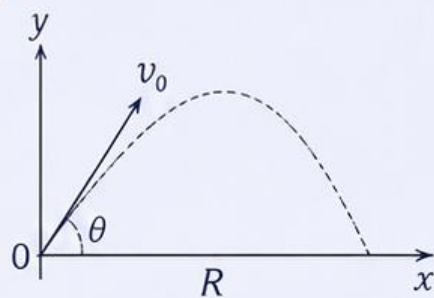


Uso educativo de tecnologías digitales y simulaciones.



Proyectos integradores que fortalecen la investigación y la comunicación científica.

$$F = ma$$



$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$



$$j' = ax^2 + bx + c$$



“

La Física explica el mundo.
Las Matemáticas lo describen.
Juntas, nos enseñan a comprenderlo
y transformarlo.



EDITORIAL
**Mundos
Alternos**

Editorial comprometida con la difusión del conocimiento científico y educativo, impulsando obras que promueven la calidad, la innovación y el desarrollo de nuevas generaciones.

ISBN: 978-9942-593-52-8

