MÁS ALLÁ DE LAS FÓRMULAS

Matemáticas que se aprenden haciendo



José Ricardo Pérez Cueva
Luis Enrique Tipan Pinta
Jhonny Gabriel Guerrón Luzón

Créditos

Más allá de las formulas
Matemáticas que se aprenden haciendo

Autores

José Ricardo Peréz Cueva
Luis Enrique Tipan Pinta
Jhonny Gabriel Guerrón Luzón

Primera edición
ISBN: 978-9942-593-71-9

Revisión científica:
Dra. Angelita Martinez – Universidad de Buenos Aires
Phd. Marcia Arbustin – Universidad Nacional de Rosario

Publicación autorizada
La Comisión Editorial presidida por Msc. Andrea Maribel Aldaz
Corrección de estilo y diseño
Msc. Valentina Chulde

Imagen de cubierta: Diseño de los autores

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico. El contenido, uso de fotografía, gráficos, cuadros, tablas, y referencias es de exclusiva responsabilidad de los autores.



Más allá de las formulas
Matemáticas que se aprenden haciendo

Prólogo

¿Qué comprende un estudiante cuando aplica correctamente una fórmula? La respuesta se vuelve más clara cuando le pedimos que explique por qué la eligió, qué representa cada cantidad o qué cambiaría si se modificaran las condiciones del problema. Un resultado correcto puede ser el punto de partida de esa conversación. Al justificarlo, el estudiante hace visible su razonamiento y el docente encuentra pistas para orientar el aprendizaje.

Más allá de las fórmulas. Matemáticas que se aprenden haciendo sitúa esa experiencia en el centro de la enseñanza. Hacer matemáticas implica ensayar una estrategia, representar una situación de distintas maneras, contrastar procedimientos y revisar una respuesta cuando deja de ser razonable. Una fórmula cobra sentido dentro de ese proceso. Permite expresar con precisión una relación que el

estudiante ha podido reconocer, poner a prueba y explicar.

Pensemos en una pregunta que puede explorarse con una hoja cuadriculada: ¿dos rectángulos con el mismo perímetro tienen siempre la misma área? Al dibujarlos y contar los cuadrados que ocupan, el estudiante puede encontrar un contraejemplo. También puede preguntarse qué dimensiones producen la mayor área para un perímetro determinado y cómo justificar su conclusión. En una actividad tan sencilla, el dibujo permite explorar, el cálculo ayuda a comparar y la explicación obliga a distinguir dos magnitudes que suelen confundirse. La tarea del docente consiste en decidir cuándo pedir una nueva representación, cuándo poner en común dos procedimientos y cuándo introducir una expresión que permita generalizar lo observado. Aprender haciendo exige tiempo para pensar sobre lo que se hace. Una actividad puede despertar entusiasmo y dejar intacta una confusión si el grupo pasa de inmediato

a la siguiente consigna. Detenerse a discutir por qué dos estrategias llegan al mismo resultado, o en qué paso se separan, convierte esa actividad en una oportunidad de aprendizaje. También cambia el lugar del error en el aula. Cuando un estudiante explica cómo llegó a una respuesta, su procedimiento permite localizar una dificultad concreta y da al grupo una razón para volver sobre el problema.

Para quienes enseñan Matemática, este libro abre una conversación sobre decisiones que se toman a diario. ¿Qué preguntas ayudan a que el estudiante explique sus elecciones? ¿Qué puede mostrar una tabla que resulta difícil advertir en una expresión algebraica? ¿Cómo evaluar la capacidad de argumentar junto con la exactitud del cálculo? José Ricardo Pérez Cueva, Luis Enrique Tipan Pinta y Jhonny Gabriel Guerrón Luzón invitan a examinar estas decisiones desde la práctica docente y a reconocer el valor de los caminos que sigue el estudiante para construir una res

Nota editorial

Editorial Mundos Alternos presenta la primera edición de *Más allá de las fórmulas. Matemáticas que se aprenden haciendo*, de José Ricardo Pérez Cueva, Luis Enrique Tipan Pinta y Jhonny Gabriel Guerrón Luzón. La obra se incorpora a nuestro catálogo de publicaciones educativas con una propuesta centrada en la comprensión de los conceptos matemáticos mediante la exploración, la resolución de problemas y la reflexión sobre los procedimientos.

El libro se dirige a docentes de Matemática, estudiantes de carreras de Educación y profesionales interesados en la didáctica de esta disciplina. Su planteamiento invita a examinar qué oportunidades ofrece una actividad para que los estudiantes formulen preguntas, ensayen estrategias, expliquen sus decisiones y comprueben la validez de sus respuestas. Estas acciones ayudan al docente a conocer cómo

razona el estudiante y a decidir qué apoyos necesita para avanzar.

Agradecemos a los autores y a quienes participaron en la preparación de esta edición. Con esta publicación, Editorial Mundos Alternos busca contribuir al intercambio de experiencias y criterios didácticos entre quienes enseñan Matemática y quienes se preparan para ejercer la docencia.

Editorial Mundos Alternos

Autores

José Ricardo Pérez Cueva
Fe y Alegría Ecuador
https://orcid.org/0009-0005-2903-0187

Es docente y profesional de la educación con más de diez años de experiencia en la enseñanza de Matemática y Física, especialmente en los niveles de Educación General Básica Superior y Bachillerato. A lo largo de su trayectoria también ha asumido responsabilidades de liderazgo como jefe de área de Matemática y, actualmente, como Coordinador Nacional de Pedagogía en EGB de Fe y Alegría Ecuador, desde donde acompaña procesos de innovación y fortalecimiento pedagógico.

Su formación incluye una Licenciatura en Ciencias de la Educación, mención Matemática y Física, y una Maestría en Educación, mención Innovación y Liderazgo Educativo. Su experiencia se complementa con una amplia formación en innovación educativa, didáctica de la Matemática, inteligencia artificial, metodologías activas y tecnologías aplicadas a la educación.

Luis Enrique Tipan Pinta
Unidad Educativa Fiscal Quito
https://orcid.org/0009-0006-2639-1013

Es un profesional dedicado al ámbito educativo, especializado en la enseñanza de la Física y comprometido con la formación académica e integral de sus estudiantes. Su vocación por la docencia se fundamenta en la convicción de que la educación es una herramienta esencial para transformar vidas, desarrollar el pensamiento crítico y construir una sociedad basada en el conocimiento. Su práctica pedagógica se caracteriza por la búsqueda constante de nuevas estrategias de enseñanza, la innovación educativa y la incorporación de metodologías activas que promueven un aprendizaje significativo. Entre sus principales intereses destacan el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), el enfoque STEAM, el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) y la integración de herramientas tecnológicas y recursos digitales en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Jhonny Gabriel Guerrón Luzón
Unidad Educativa Municipal Bicentenario
https://orcid.org/0009-0009-0569-2863

Es un profesional de la educación cuya trayectoria académica y pedagógica se ha orientado al fortalecimiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el área de las ciencias exactas. Es Licenciado en Ciencias de la Educación con mención en Matemática y Física por la Universidad Central del Ecuador, formación que ha consolidado su interés por la investigación educativa, el desarrollo del pensamiento lógico y la innovación metodológica aplicada al aula. Cuenta con experiencia profesional en el ámbito educativo, desempeñándose con responsabilidad, ética y compromiso en la formación integral de los estudiantes. Su práctica docente se ha caracterizado por promover una enseñanza fundamentada en la comprensión analítica, el razonamiento crítico y la resolución de problemas, orientando el aprendizaje hacia la construcción de conocimientos significativos y contextualizados.

Introducción

Un estudiante puede calcular el veinte por ciento de una cantidad y, sin embargo, dudar cuando debe decidir cuál de dos descuentos le conviene. La segunda tarea le exige identificar la cantidad de referencia, elegir un procedimiento y comprobar si el resultado responde a la pregunta. Esa distancia entre ejecutar una operación y saber cuándo, cómo y para qué utilizarla es el punto de partida de *Más allá de las fórmulas. Matemáticas que se aprenden haciendo*.

Como docentes de Matemática, nos interesa examinar qué experiencias ayudan a los estudiantes a comprender las relaciones que expresan las fórmulas y a utilizarlas en situaciones distintas de aquellas en las que las aprendieron. Una expresión simbólica permite condensar una relación y aplicarla con precisión. Comprenderla supone reconocer qué representa cada cantidad, bajo qué condiciones puede utilizarse y cómo interpretar el resultado que produce.

En este libro, «aprender haciendo» significa involucrarse en el trabajo intelectual propio de las matemáticas. Al resolver un problema, los estudiantes pueden organizar datos, ensayar una representación, formular una conjetura y buscar razones para sostenerla o revisarla. Cada una de estas acciones cumple una función. Una tabla puede ayudar a reconocer una regularidad. Un dibujo puede revelar una relación que pasa inadvertida en el enunciado. Un contraejemplo puede mostrar que una afirmación, aunque funcione en varios casos, necesita modificarse. El aprendizaje se hace visible cuando el estudiante puede explicar qué descubrió y en qué se apoya para afirmarlo.

Consideremos dos descuentos sucesivos, uno del veinte por ciento y otro del diez por ciento. Es razonable que, en un primer intento, alguien los sume y espere una rebaja total del treinta por ciento. Si el precio inicial es de cien dólares, el primer descuento lo reduce a ochenta y el segundo

se aplica sobre esos ochenta. El precio final es de setenta y dos dólares. La comparación permite advertir algo que suele quedar oculto en la aplicación mecánica de una regla: el porcentaje depende de la cantidad que se toma como referencia. Probar con otros precios y explicar por qué la reducción total sigue siendo del veintiocho por ciento permite pasar de un caso particular a una relación general.

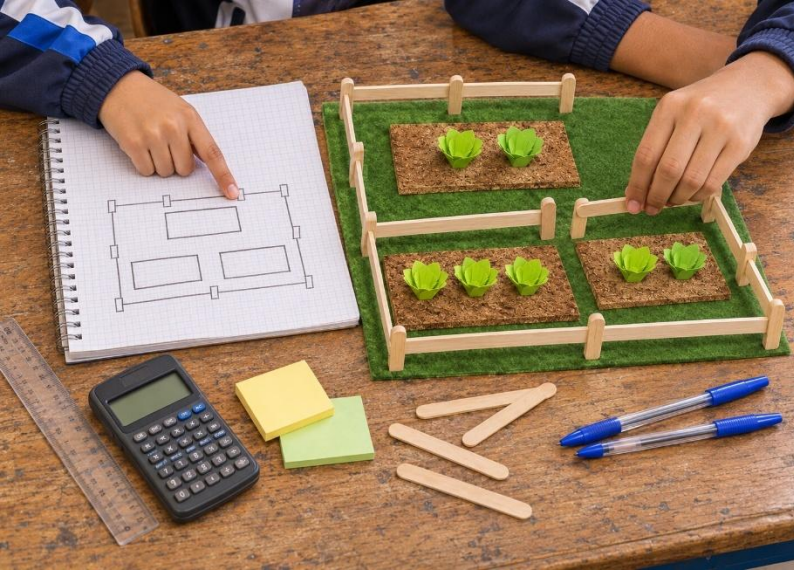
El docente desempeña un papel decisivo en ese tránsito. Al planificar, elige problemas que hagan visible la idea matemática que quiere trabajar y anticipa las estrategias que podrían aparecer. Durante la clase, escucha las explicaciones y decide cuándo conviene ofrecer una pista, pedir otra representación o poner en diálogo dos soluciones. Después, recupera las ideas que surgieron y les da una formulación que los estudiantes puedan usar en otros problemas. Una pregunta como «¿sobre qué cantidad calculaste ese porcentaje?» puede

orientar la revisión y, al mismo tiempo, mostrar qué comprendió el estudiante.

Esta perspectiva tiene consecuencias para la evaluación. Una respuesta correcta aporta información sobre el resultado, mientras que una explicación, un esquema o la comparación entre procedimientos permite examinar cómo se llegó a él. Observar esas evidencias ayuda a distinguir, por ejemplo, entre un error de cálculo y una dificultad para interpretar la situación. Cada caso requiere una intervención distinta. También permite reconocer avances que una calificación centrada en la respuesta final puede pasar por alto, como la capacidad de detectar una contradicción o corregir una estrategia con argumentos.

La obra se dirige a docentes en ejercicio y a quienes se preparan para enseñar Matemática. Sus páginas proponen una forma de revisar las decisiones cotidianas del aula, desde la elección de una tarea hasta el tipo de explicación que se solicita al

evaluarla. La pregunta que guía esta lectura es concreta: **¿qué debe hacer un estudiante para que podamos saber que comprendió una idea matemática y que está en condiciones de usarla en un problema nuevo?**



CAPÍTULO I

Aprender matemáticas haciendo

1.1. ¿Qué significa aprender matemáticas haciendo?

Sobre una mesa hay dos rectángulos de papel cuadriculado. Uno mide seis cuadros de largo y dos de ancho. El otro mide cuatro cuadros de largo y cuatro de ancho. Una estudiante señala que ambos tienen dieciséis unidades de perímetro y supone que cubren la misma superficie. Su compañero cuenta los cuadrados del interior y obtiene doce en el primero y dieciséis en el segundo. La diferencia plantea una pregunta que merece discutirse en clase: ¿cómo pueden dos figuras tener el mismo perímetro y ocupar superficies distintas?

En esta situación, el material permite examinar una idea. Al recorrer el borde con el dedo, los estudiantes identifican qué están midiendo cuando calculan el perímetro. Al contar los cuadrados que recubren cada figura, reconocen qué magnitud expresa el área. Pedirles que señalen en el dibujo de dónde sale cada número ayuda a distinguir esas

dos medidas y a explicar por qué sus valores pueden coincidir en una figura y diferir en otra.

Aprender matemáticas haciendo implica tomar decisiones sobre cómo resolver una situación y explicar las relaciones que se descubren en el proceso. El estudiante puede empezar con un dibujo, pasar al conteo y, después, organizar los datos en una tabla. Cada representación le permite mirar algo distinto. En el dibujo se aprecia cómo cambia la forma del rectángulo. En la tabla resulta más fácil advertir que, cuando el perímetro se mantiene fijo, al aumentar un lado en una unidad el otro debe disminuir en la misma cantidad. Poner en relación estas observaciones es parte del aprendizaje.

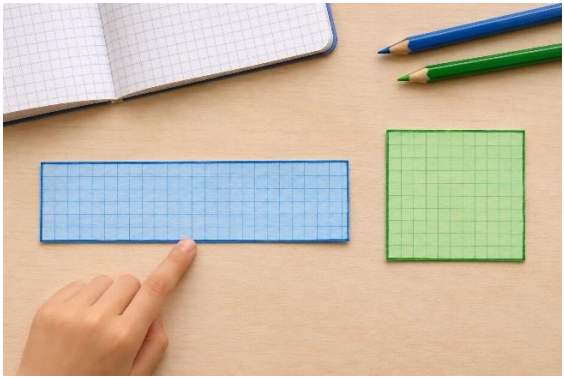


Figura 1.1. *Exploración del contorno y la superficie con papel cuadriculado.*

Actividad visual. Una cerca, varios huertos

La escuela dispone de 16 metros de cerca para delimitar los cuatro lados de un huerto rectangular. El terreno permite probar distintas formas y se decide trabajar con lados que midan un número entero de metros. ¿Qué diseño deja más espacio para sembrar?

Para explorar el problema, cada equipo recibe papel cuadriculado y representa un metro de

longitud con el lado de un cuadro. El docente puede mostrar dos diseños iniciales o pedir que los equipos los tracen a partir de sus medidas.

Dibujen un huerto de 6 m por 2 m y otro de 4 m por 4 m. Marquen el borde de cada diseño con un color y sombreen el interior con otro.

Comprueben que los dos diseños utilizan los 16 metros de cerca. Cuenten los cuadrados del interior y expliquen qué representa cada uno.

Busquen otros diseños rectangulares que utilicen toda la cerca. Anoten las medidas y el área. Un rectángulo girado cuenta como el mismo diseño.

Elijan el diseño que deja mayor superficie para sembrar. Expliquen cómo saben que revisaron todas las posibilidades.

Largo (m)	Ancho (m)	Perímetro (m)	Área (m²)
7	1	16	7
6	2	16	12
5	3	16	15
4	4	16	16

Figura sugerida para la maquetación. Dos huertos dibujados sobre una cuadrícula a la misma escala, uno de 6 × 2 y otro de 4 × 4. En ambos, el contorno se destaca en azul y los cuadrados interiores se sombrean en verde. Los rótulos indican las dimensiones de cada huerto.

Del dibujo a la justificación

Algunos equipos encontrarán pronto que el huerto cuadrado tiene la mayor superficie entre los diseños que dibujaron. La pregunta «¿cómo saben que no falta otro diseño?» les pide justificar el alcance de su respuesta. Como los lados opuestos tienen la misma longitud, la suma del largo y el ancho debe ser de ocho metros. A partir de esa condición se pueden ordenar las parejas posibles y reconocer cuándo empiezan a repetirse al girar la figura. La tabla recoge así una búsqueda sistemática que el grupo puede explicar.

Durante la puesta en común, conviene recuperar los procedimientos que aparecieron en el aula. Un equipo puede explicar el área contando los cuadrados uno a uno. Otro puede señalar que en el rectángulo de seis por dos hay dos filas de seis cuadrados. Al relacionar ambos procedimientos, el docente puede introducir o recuperar la expresión \(A = largo \times ancho\). El dibujo permite interpretar la multiplicación como una manera de contar toda la superficie y comprender por qué el resultado se expresa en metros cuadrados. Una distinción similar se puede trabajar para el perímetro, que se obtiene al sumar las longitudes de los cuatro lados y se expresa en metros.

Una variante breve permite observar si los estudiantes pueden usar lo aprendido. Si la escuela consigue 20 metros de cerca, cada equipo debe anticipar qué dimensiones dejarán más superficie y comprobar su predicción. El diseño de 5 m por 5 m ofrece 25 m² entre las opciones con lados enteros. La evidencia de comprensión aparece

cuando el estudiante explica por qué ahora el largo y el ancho deben sumar diez metros y utiliza esa relación para revisar las posibilidades. A partir de las dos experiencias, el grupo puede formular una conjetura sobre los huertos cuadrados y plantear qué tendría que demostrar para sostenerla en otros casos.

1.2. Del material concreto a la expresión matemática

En el apartado anterior, el papel cuadriculado permitió distinguir el borde de una figura de la superficie que ocupa. Ahora, el mismo material puede servir para explicar cómo crece una figura. Si un estudiante reproduce tres diseños con fichas y dibuja el cuarto, puede contar cuántas piezas ha utilizado. Si se le pide averiguar cuántas necesitaría para construir el diseño número veinte, tendrá que buscar una relación que le permita anticipar el resultado.

Las fichas permiten armar y desarmar una figura para reconocer cómo está organizada. El dibujo conserva esa organización y facilita señalar qué partes cambian. Una tabla relaciona el número de la figura con la cantidad de fichas que contiene. La expresión algebraica permite calcular esa cantidad para cualquier posición. Para dar sentido a la

expresión, el estudiante puede señalar en el diseño qué representa cada término.

Actividad visual. Un mosaico que crece

Para decorar el borde de una jardinera, un grupo de estudiantes diseña un mosaico en forma de L. En el primer diseño, cada brazo tiene dos piezas cuadradas. En el segundo, cada brazo tiene tres. En el tercero, cada brazo tiene cuatro. La pieza de la esquina pertenece a los dos brazos y se cuenta una sola vez.

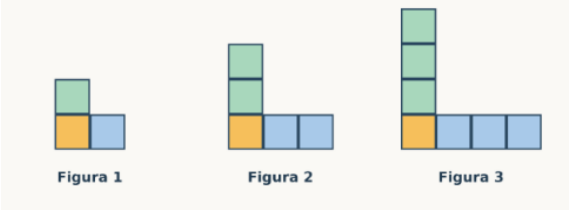


Figura 1.2 *Tres etapas del crecimiento de un mosaico en forma de L.*

¿Cuántas piezas se necesitan para construir el diseño número veinte?

Construyan los tres primeros mosaicos con fichas cuadradas o recortes de papel. Mantengan la esquina en el mismo lugar y hagan crecer un brazo hacia arriba y el otro hacia la derecha.

Dibujen las tres figuras en papel cuadriculado. Marquen la esquina con un color y utilicen dos colores distintos para las piezas restantes de los brazos.

Predigan cuántas piezas tendrá la cuarta figura. Dibújenla para comprobar su respuesta.

Registren en una tabla el número de cada figura, las piezas de uno de los brazos contando la esquina y el total de piezas.

Calculen cuántas piezas tendrá la figura veinte sin dibujarla completa. Expliquen cómo obtuvieron el total.

Dos maneras de contar el mismo mosaico

Un equipo puede fijarse en lo que cambia entre figuras consecutivas. En cada paso se añade una pieza a cada brazo. Por eso, las cuatro primeras figuras tienen 3, 5, 7 y 9 piezas. Desde la primera figura hasta la vigésima hay diecinueve pasos. Las treinta y ocho piezas que se agregan, sumadas a las tres de la primera figura, dan un total de 41 piezas.

Otro equipo puede contar por partes. En la figura veinte hay veinte piezas en cada brazo si se deja aparte la esquina. Al sumar los dos grupos y añadir la esquina, se obtiene el mismo resultado. Si n representa el número de la figura, la regla general se escribe así.

Total de piezas = 2 × n + 1

El término 2 × n reúne las piezas de los dos brazos después de separar la esquina. El 1 corresponde a esa pieza compartida. Para conectar el dibujo con

la expresión, el docente puede preguntar dónde se ve cada término en el mosaico.

También es posible contar ambos brazos completos. Cada uno tiene n + 1 piezas. Como la esquina se cuenta dos veces, se resta una pieza. La expresión $2 \times (n + 1) - 1$ da el mismo resultado y permite explicar la equivalencia a partir de dos maneras de contar.

Para comprobar la comprensión, el docente puede invertir la pregunta. Si tenemos 31 piezas y queremos usarlas todas, ¿qué número de figura podemos construir? Al reservar una pieza para la esquina y repartir las treinta restantes en dos grupos iguales, quedan quince piezas en cada brazo aparte de la esquina. Se obtiene así la figura quince.

1.3. Resolver problemas y justificar decisiones

Dos estudiantes recorren el largo del aula. Uno da doce pasos y el otro, catorce. Ambos cubren la misma distancia. ¿Cómo podemos convertir esos conteos en una estimación en metros? Cada estudiante medirá primero su paso habitual en un tramo conocido y pondrá a prueba su estimación en otro recorrido.

Actividad práctica. ¿Cuánto mide el aula a pasos?

Materiales. Cinta métrica, cinta adhesiva, cuaderno y calculadora. Trabajen en parejas en una zona recta y despejada.



Figura 1.3 *Recorrido de huellas entre las marcas de inicio y llegada para estimar una distancia en el aula.*

Marquen un tramo de 5 m. Cada integrante recorre el tramo tres veces con su paso habitual mientras su pareja cuenta. Empiecen en la misma marca y mantengan un ritmo natural. Si falta aproximadamente medio paso para llegar, registren el total con medio paso.

Calculen el promedio de los tres conteos de cada integrante. Dividan 5 m entre ese promedio para

estimar cuántos metros mide un paso. Conserven los decimales en la calculadora y redondeen el resultado final a dos decimales.

Marquen los extremos de un segundo recorrido, por ejemplo, entre dos puntos del aula. Cada integrante lo recorre y multiplica su conteo por la longitud estimada de su propio paso. Anoten ambas estimaciones antes de usar la cinta métrica.

Midan con la cinta el mismo recorrido. Para cada estimación, resten el valor menor del mayor. Registren la diferencia en centímetros e indiquen si la estimación quedó por debajo o por encima de la medida con cinta.

Elijan un ajuste para mejorar el procedimiento, por ejemplo, mirar al frente y caminar al mismo ritmo en ambos tramos. Repitan la estimación con ese ajuste. Comparen las diferencias y expliquen si el cambio mejoró el resultado.

Registro de campo

¿Cuánto mide el aula a pasos?

Curso: _____ Equipo: _____ Fecha: _____

Integrante A: _____ Integrante B: _____

1. Longitud del paso en un tramo de 5 m

Dato	Integrante A	Integrante B
Conteos de los tres intentos	___ / ___ / ___	___ / ___ / ___
Promedio de los conteos	_____ pasos	_____ pasos
Longitud estimada de un paso	_____ m	_____ m

2. Estimación y verificación en otro tramo

Dato	Integrante A	Integrante B
Pasos contados	_____ pasos	_____ pasos
Distancia estimada	_____ m	_____ m
Distancia medida con cinta	_____ m	_____ m
Diferencia entre ambas distancias	_____ cm	_____ cm
La estimación quedó…	☐ Debajo ☐ Encima	☐ Debajo ☐ Encima

3. Segundo intento después de un ajuste

Dato	Integrante A	Integrante B
Ajuste realizado	_____	_____
Nueva estimación	_____ m	_____ m
Nueva diferencia	_____ cm	_____ cm

¿Les dio un resultado más cercano a la medida con cinta? ¿Cómo lo saben?

Puesta en común

Ejemplo resuelto. Si una estudiante cuenta 8, 8 y 9 pasos en los recorridos de 5 m, su promedio es aproximadamente 8,33 pasos. Al dividir 5 m entre ese promedio, obtiene una longitud aproximada de 0,60 m por paso. Si en el segundo recorrido cuenta 12 pasos, estima 7,20 m. Si la cinta marca 7,45 m, la diferencia es de 25 cm y la estimación quedó por debajo.

Durante la puesta en común, pida a cada pareja que señale en su registro cuánto obtuvo antes y después del ajuste. Si la diferencia aumentó, invite al equipo a revisar qué pudo cambiar. Las marcas de inicio y llegada, el ritmo y el conteo del último paso ofrecen pistas para examinar el procedimiento.

Decisión final. ¿Usarían este método para explicar aproximadamente cuánto mide el aula? ¿Y para cortar una cuerda que debe llegar de una marca a la otra? Justifiquen ambas respuestas con la

diferencia que observaron. Si la cuerda admite un margen de 5 cm y el equipo se apartó 25 cm, su estimación supera ese margen.

Reflexión didáctica. ¿Qué aprendemos al medir con nuestros pasos?

En esta actividad, los estudiantes construyen su propia manera de estimar una distancia. Primero recorren un tramo de cinco metros y cuentan sus pasos. Al comparar los intentos, pueden observar que una misma persona no siempre da exactamente el mismo número de pasos y que dos personas pueden recorrer la misma distancia con conteos distintos. Así, el promedio responde a una necesidad que surge del ejercicio: obtener un valor representativo para estimar cuánto mide su paso habitual.

Después, cada integrante usa ese valor para anticipar la longitud de otro tramo. Al medirlo con la cinta, descubre cuánto se acercó su estimación y si quedó por debajo o por encima. Esa diferencia

da pie a revisar una decisión concreta. Si creen que aceleraron al acercarse a la meta o que contaron de manera distinta el último paso, pueden ajustar el procedimiento y repetirlo. La ficha les permite comparar los dos intentos y comprobar si el cambio mejoró el resultado.

La experiencia les ayuda a entender que **la precisión necesaria depende de para qué se va a usar la medida**. Una estimación puede servir para comunicar aproximadamente el largo del aula, mientras que cortar una cuerda para unir dos marcas exige comprobar si la diferencia está dentro del margen permitido. El aprendizaje se hace visible cuando los estudiantes pueden justificar esa decisión con sus propios datos y explicar cómo los obtuvieron.

1.4. Formular conjeturas y ponerlas a prueba

En la actividad anterior, los estudiantes estimaron una distancia y usaron la cinta métrica para comprobar su resultado. En un juego de azar, la comprobación exige varias observaciones. Si una ruleta señala el azul en la primera tirada, esa experiencia dice qué ocurrió una vez. Para discutir si el juego favorece a alguien, hace falta examinar cómo está construida la ruleta y comparar los resultados de muchas tiradas.

Actividad práctica. ¿Es justa nuestra ruleta?

El curso necesita elegir quién empieza un juego entre tres equipos. Cada equipo tiene un color. Diseñen una ruleta de papel y comprueben si sirve para darles a los tres la misma oportunidad de empezar.

Materiales. Cartulina, regla, lápices de tres colores, un clip, un lápiz y, para el rediseño, un transportador.



Figura 1.4. *Ruleta casera hecha con un plato de cartón y papel de colores. La punta del lápiz se apoya en el centro y el clip gira alrededor de ella.*

Dibujen un círculo y divídanlo en cuatro partes iguales con dos diámetros perpendiculares. Coloreen dos partes contiguas de azul, una de verde y otra de naranja. Apoyen la punta del lápiz en el centro, dentro de un extremo del clip, y den un impulso al extremo libre para que gire.

Antes de girar, escriban qué color esperan que salga con mayor frecuencia y en qué se basan. Si el clip se detiene sobre una línea divisoria, repitan el giro.

Hagan veinte giros válidos. Alternen quién hace girar el clip y quién anota el color. Reúnan los conteos de todos los grupos y dividan las apariciones de cada color entre el total de giros para comparar las frecuencias.

Diseñen una segunda ruleta con tres sectores de 120 grados, uno de cada color. Repitan los veinte giros con el mismo procedimiento, reúnan los datos y comparen las dos ruletas.

Elijan cuál usarían para decidir quién empieza. Justifiquen la recomendación con el tamaño de los sectores y expliquen qué aportan los resultados de los giros.

Registro de los giros

¿Es justa nuestra ruleta?

Curso: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

Ruleta	Azul	Verde	Naranja	Total
Primera · Mi grupo	_____	_____	_____	20
Primera · Todo el curso	_____	_____	_____	_____
Segunda · Mi grupo	_____	_____	_____	20
Segunda · Todo el curso	_____	_____	_____	_____

Puesta en común

En la primera ruleta, el azul ocupa la mitad del círculo. El verde y el naranja ocupan un cuarto cada uno. Si el clip puede detenerse con la misma facilidad en cualquier dirección, la probabilidad de obtener azul es de 1 de cada 2 y la de cada uno de los otros colores es de 1 de cada 4. Con veinte giros, 10, 5 y 5 son conteos esperados. Los conteos de cada grupo pueden ser distintos.

En la segunda ruleta, cada sector ocupa un tercio del círculo. Esa igualdad de tamaños justifica elegirla para el sorteo. Si un color sale más veces que otro en veinte giros, pregunte al grupo si la diferencia también aparece al reunir los datos del curso. Si los resultados conjuntos se apartan mucho de lo esperado, revisen si el clip gira libremente o si el modo de impulsarlo favorece alguna dirección.

Reflexión didáctica

Los estudiantes aprenden haciendo cuando sus decisiones dejan una huella que pueden examinar. Al dibujar la primera ruleta, ven que los tres colores ocupan espacios diferentes. Al girar el clip, registran resultados que pueden variar de un grupo a otro. Y al rediseñarla, cambian deliberadamente el tamaño de los sectores para dar a cada equipo la misma oportunidad. La equidad del sorteo se argumenta desde la geometría de la ruleta. Los giros permiten observar cómo esa diferencia de tamaños se manifiesta en los datos y discutir por qué las frecuencias pueden variar entre series de tiradas.

1.5. Revisar y corregir a partir del error

En un juego de cálculo, una jugada puede parecer acertada hasta que otro equipo intenta resolverla. Si los resultados difieren, conviene reconstruir el recorrido: ¿qué operación se hizo primero?, ¿se usaron todos los números?, ¿los paréntesis expresan lo que el equipo quería calcular? Conservar la primera jugada permite señalar el cambio que resolvió el problema.

Juego de tarjetas. ¡Lleguemos a 24!

Materiales. Papel o cartulina para elaborar tarjetas con números, signos y paréntesis, más un cuaderno para registrar las jugadas.

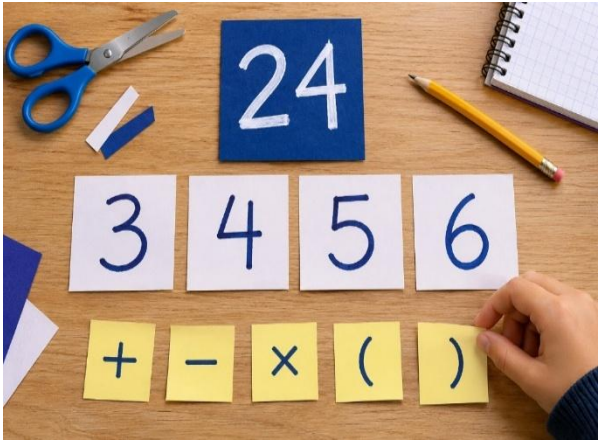


Figura 1.5. *Tarjetas de cartulina para el reto «¡Lleguemos a 24!». Los equipos combinan los cuatro números con signos y paréntesis para alcanzar la meta.*

En cada ronda, todos los equipos reciben los mismos cuatro números. Deben obtener 24 usando cada tarjeta numérica una sola vez. Pueden sumar, restar, multiplicar, dividir y usar paréntesis. Los signos pueden repetirse.

Construyan en la mesa una expresión con las cuatro tarjetas. Muevan las piezas para probar qué cambia si agrupan dos operaciones de otra manera.

Copien la primera jugada y calculen el resultado paso a paso. Si queda lejos de 24, busquen un resultado intermedio que les ayude. Por ejemplo, si conservan la tarjeta del 6 para el final, piensen qué número necesitan multiplicar por 6.

Intercambien la jugada con otro equipo. El equipo revisor comprueba que se usaron las cuatro tarjetas una sola vez y señala el primer paso que debe revisarse, si lo hay.

Armen una segunda versión si necesitan corregir la jugada. Si la primera ya da 24, intenten obtenerlo de otra manera. Cada equipo gana un punto cuando una jugada cumple las reglas, da 24 y el equipo puede explicar cómo la verificó.



Puesta en común

Con las tarjetas 3, 4, 5 y 6, un equipo podría escribir $6 \times 5 + 3 - 4$ y esperar obtener 24. La expresión da 29, porque la multiplicación se realiza primero. Si la intención era obtener 4 con las tarjetas 5, 3 y 4 y luego multiplicar por 6, la escritura debe incluir los paréntesis.

Jugada inicial. $6 \times 5 + 3 - 4 = 29$

Jugada corregida. $6 \times (5 + 3 - 4) = 24$

Para la segunda ronda, una combinación posible es $(1 + 3) \times (2 + 4)$. En la tercera, puede formarse $8 \times (4 + 2 - 3)$. Pida a los equipos que indiquen qué operación realizaron primero y por qué. Si una ronda admite varias jugadas, compárenlas antes de pasar a las soluciones propuestas.

Reflexión didáctica. ¿Qué nos enseña una jugada que no llega a 24?

En el reto «¡Lleguemos a 24!», mover una tarjeta permite poner a prueba una idea. Si un equipo conserva el 6 para multiplicar al final, puede preguntarse qué número necesita formar con las otras tres tarjetas. Una vez que identifica el 4 como resultado intermedio, reorganiza el 5, el 3 y el 4 para obtenerlo. Así, la meta orienta la búsqueda y ayuda a decidir qué operaciones conviene probar.

El error se vuelve visible cuando otro equipo intenta reproducir la jugada. Si la expresión inicial

es $6 \times 5 + 3 - 4$, el equipo revisor obtiene 29 porque la multiplicación se realiza primero. Quienes armaron la jugada pueden explicar que su intención era calcular primero $5 + 3 - 4$. Al colocar los paréntesis en $6 \times (5 + 3 - 4)$, hacen que la expresión escrita comunique el procedimiento que tenían en mente. Otro equipo puede comprobarlo y llegar a 24 siguiendo los mismos pasos.

La evidencia de aprendizaje aparece cuando los estudiantes comparan sus dos jugadas y explican qué cambió y por qué. Si llegan a 24 desde el primer intento, pueden buscar una segunda solución y explicar qué estrategia les permitió encontrarla. El intercambio entre equipos convierte el juego en una oportunidad para aprender a escribir operaciones que otros puedan interpretar y verificar.

1.6. Comunicar y comprobar un procedimiento

En el juego de tarjetas, otro equipo pudo comprobar una jugada porque los números, los signos y los paréntesis indicaban qué operaciones debía realizar y en qué orden. Al describir un recorrido ocurre algo parecido. Si decimos «avanza dos casillas», queda una pregunta: ¿hacia dónde? Para que otra persona pueda reproducir el trayecto, necesita saber desde dónde parte, cuántas casillas debe avanzar y en qué dirección.

Juego por parejas. El mapa secreto

Materiales. Dos copias del tablero por pareja, una ficha o tapa de botella y un lápiz.

Las letras identifican las columnas y los números identifican las filas. Por ejemplo, **C2** es la casilla donde se cruzan la columna C y la fila 2.



Figura 1.6. *El tesoro del jardín*

Nota. La bandera indica la salida (A1) y el cofre señala la meta (F6). Los setos representan casillas bloqueadas. La ficha puede moverse en sentido horizontal o vertical.

Reto. Guíen la ficha desde la bandera hasta el cofre sin atravesar los setos. La ficha puede moverse hacia arriba, abajo, izquierda o derecha. Desplazarla a una casilla vecina cuenta como un movimiento. Así, una instrucción como «avanza tres casillas hacia arriba» equivale a tres movimientos.

1. **Tracen una ruta.** Una persona será la guía y dibujará en su tablero un recorrido de A1 a F6. Mantendrá su copia fuera de la vista de su pareja, quien colocará la ficha en A1.

2. **Pongan a prueba las instrucciones.** La persona que guía dicta una indicación a la vez. Su pareja mueve la ficha y marca el trayecto en su propio tablero. Si una indicación es ambigua, conduce a un seto o saca la ficha del tablero, anoten en qué casilla surgió el problema y qué se indicó.

3. **Comparen y corrijan.** Coloquen los tableros uno junto al otro. Si los recorridos difieren, localicen la primera casilla en la que se separan y revisen la instrucción correspondiente. Vuelvan a empezar desde A1 con la versión corregida.

4. **Cambien de rol y busquen otra ruta.** Cuenten los movimientos de ambos recorridos. ¿Se puede llegar al cofre en menos de diez movimientos? Expliquen su respuesta con ayuda del tablero.

Puesta en común

Una ruta posible pasa por **A1, B1, B4, C4, C5, F5 y F6**. Estas coordenadas indican la salida, los cambios de dirección y la llegada. Para reproducir el recorrido, la guía puede dictar la siguiente secuencia: una casilla a la derecha, tres hacia arriba, una a la derecha, una hacia arriba, tres a la derecha y una hacia arriba.

El recorrido suma **diez movimientos**. Para pasar de la columna A la F se necesitan al menos cinco movimientos horizontales. Para llegar de la fila 1 a la 6 se necesitan al menos cinco verticales. Esta ruta evita los setos y cumple ambos desplazamientos sin retroceder. Por eso, **diez es el mínimo**, aunque existan otros recorridos que también lleguen al cofre en diez movimientos.

Reflexión didáctica

El tablero permite comprobar qué entendió la persona que recibió las instrucciones. Una guía puede tener una ruta clara en su propia copia y omitir una dirección al dictarla. Cuando la ficha se detiene o toma otro camino, ambos estudiantes pueden señalar el punto exacto en el que dejaron de seguir el mismo recorrido. Al reformular la indicación y probarla de nuevo, descubren qué información hacía falta y cómo expresarla con precisión.

La comparación de rutas plantea una segunda pregunta. Llegar al cofre demuestra que un recorrido es posible. Para afirmar que es el más corto, los estudiantes deben explicar por qué ninguna ruta puede tener menos de cinco movimientos horizontales y cinco verticales. **Mover la ficha les permite comprobar una solución. Usar las coordenadas les permite justificar por qué esa solución alcanza el mínimo.**

1.7. Los ángulos que nos rodean

La esquina de un escritorio mantiene su abertura aunque cambiemos de lugar el mueble. En cambio, el ángulo de una puerta entreabierta varía al moverla. Observar ambos casos permite reconocer qué direcciones forman un ángulo y cuándo cambia su medida.

Actividad práctica. Exploradores de ángulos

Materiales. Regla, graduador o transportador, compás, lápiz, papel y dos tiras de cartulina con cinta adhesiva.



Figura 1.7. *¿Dónde encontramos ángulos en el aula?*

Nota. 1. Escritorio: prolonguen los dos bordes rectos de la esquina redondeada hasta que se encuentren. **2. Ventana:** observen dónde se unen el borde vertical y el horizontal del marco. **3. Puerta:** ubiquen la bisagra y comparen, desde arriba, la dirección de la puerta cerrada con la de la puerta entreabierta.

Ángulos en el aula. La imagen orienta la observación. Las medidas se toman en los objetos reales.

Localicen una esquina del escritorio, una esquina del marco de la ventana, una puerta entreabierta y otro objeto del aula. Dibujen un croquis de cada ángulo. Marquen el vértice y los dos lados.

Estimen si cada abertura es menor, igual o mayor que 90°. Luego midan con el graduador. Centren el instrumento en el vértice, alineen el 0° con uno de los lados y lean la escala que empieza en ese cero.

Si el graduador no cabe, superpongan dos tiras de cartulina por un extremo. Alineen sus bordes con

las dos direcciones y fíjenlas con cinta para trasladar la abertura al papel. Para la puerta, comparen en el plano horizontal la dirección de la hoja cerrada con la de la hoja entreabierta. El vértice está en el eje de las bisagras.

Repitan la medición con la puerta en otra posición. Reproduzcan los dos ángulos con regla y graduador, partiendo del mismo lado inicial. Tracen con el compás dos arcos del mismo radio centrados en el vértice. Comparen sus longitudes y expliquen cuál corresponde a la mayor abertura.

Bitácora de ángulos

Explora tu aula con regla, graduador y compás.



Integrantes _____ Curso ____ Fecha _____

Dibuja el ángulo y marca su vértice y sus lados antes de medir.

1 Escritorio

Croquis

Estimo ____° Mido ____°

Tipo de ángulo _____

¿Coincidió con mi estimación? _____

2 Marco de la ventana

Croquis

Estimo ____° Mido ____°

Tipo de ángulo _____

¿Coincidió con mi estimación? _____

3 Puerta entreabierta

Croquis de las dos posiciones

Posición 1 Estimo ____° Mido ____°

Posición 2 Estimo ____° Mido ____°

Tipo de ángulo en cada posición _____

4 Otro objeto del aula

Croquis

Estimo ____° Mido ____°

Tipo de ángulo _____

Objeto _____

Reto final ¿Cuánto giró la puerta?

Compara las dos mediciones. ¿Cuántos grados cambió la abertura?

Traza con el compás arcos del mismo radio. ¿Cuál quedó más largo?

Puesta en común

Comparen qué aberturas se mantuvieron y cuál cambió al mover el objeto. Si dos parejas obtienen medidas distintas en la misma esquina, revisen si eligieron los mismos lados, centraron el graduador y leyeron desde el mismo cero. Si la puerta pasó de 40° a 65°, por ejemplo, su abertura aumentó 25° y las dos posiciones corresponden a ángulos agudos.

Decisión práctica. Elijan un lugar para la papelera que deje libre el giro de la puerta. Para justificarlo, dibujen la puerta y la base de la papelera a la misma escala, y giren una tira de cartulina desde la posición cerrada hasta la apertura habitual. Marquen dónde la tira cruzaría la base de la papelera y dónde quedaría libre.

Reflexión didáctica

Al dibujar la esquina del escritorio o del marco de la ventana, los estudiantes deben decidir **dónde está el vértice y qué bordes representan los lados del ángulo**. Luego estiman la abertura y la comprueban con el graduador. Si dos parejas obtienen medidas distintas, pueden volver al objeto y revisar si eligieron los mismos bordes, si centraron el instrumento en el vértice y desde qué cero iniciaron la lectura.

La puerta les permite observar un ángulo que cambia. Al reproducir dos posiciones de la hoja, toman la dirección de la puerta cerrada como referencia y usan la bisagra como vértice. Después trazan dos arcos con la misma abertura del compás. Así comprueban que, **a igual radio, el arco más largo corresponde al ángulo mayor**. La bitácora les permite reconstruir ese hallazgo al comparar lo que estimaron, midieron y dibujaron.

El aprendizaje se hace visible cuando usan el plano para explicar **dónde colocarían la papelera y por qué**. Para defender su decisión, deben mostrar todo el espacio que recorre la puerta al abrirse y comprobar que la ubicación elegida queda fuera de ese recorrido.



CAPÍTULO II

Diseñar, construir y comprobar

2.1. Un puente de papel que resista más

Una hoja de papel colocada entre dos apoyos puede doblarse con el peso de unas pocas monedas. Si plegamos otra hoja del mismo tamaño, ¿podrá sostener una carga mayor? Para averiguarlo, los estudiantes construirán, pondrán a prueba y rediseñarán sus propios puentes. El reto consiste en **aumentar la carga que soporta el puente usando la misma cantidad de papel**.

Reto de construcción. ¿Cuántas monedas soporta tu puente?

Materiales por equipo. Seis hojas de papel del mismo tamaño y grosor, dos apoyos de igual altura, regla, lápiz y monedas iguales. Los apoyos pueden ser dos pilas de libros.



Figura 2.1 *Comparación de dos puentes de papel*

Nota. A la izquierda se muestra un puente de hoja plana y, a la derecha, un puente de papel plegado. En la actividad, se doblan únicamente los dos bordes largos de la hoja para formar un canal. Ambos diseños se prueban con la misma separación entre los apoyos y con monedas iguales colocadas en el centro del tramo.

1. **Preparen el lugar de prueba.** Coloquen los apoyos a 15 cm de distancia, medidos entre sus bordes interiores. Marquen su posición sobre la mesa para mantenerla durante toda la actividad. Cada puente se construirá con una sola hoja, sin añadir cinta ni refuerzos.

2. **Formulen una predicción.** Dibujen dos diseños en el cuaderno. El primero será una hoja plana. Para el segundo, doblen hacia arriba dos franjas de 2 cm a lo largo de los bordes largos de la hoja, de modo que quede como un canal. ¿Cuál creen que sostendrá más monedas? Expliquen su predicción antes de probarlos.

3. **Construyan y prueben.** Coloquen cada puente sobre los apoyos. Añadan monedas de una en una, en el centro del tramo. Esperen unos segundos después de colocar cada moneda. Si el puente toca la mesa o deja caer la carga, registren cuántas monedas sostuvo **antes** de que eso ocurriera.

4. **Repitan la prueba con papel nuevo.** Construyan una segunda pieza de cada diseño y ensáyenla con los mismos apoyos, la misma distancia y el mismo tipo de monedas. Registren ambos resultados. Usar una hoja nueva evita que la deformación de la primera prueba afecte la segunda.

5. **Mejoren un diseño.** Usen las dos hojas restantes para construir y probar dos veces una versión mejorada del puente plegado. Cambien una sola característica, como la altura de las franjas laterales. Dibujen el cambio y expliquen si ayudó a sostener más monedas.

Bitácora de construcción

¿Cuántas monedas soporta tu puente de papel?

Equipo _____ Curso _____ Fecha _____

Antes de probar

¿Qué diseño sostendrá más monedas? ¿Por qué?

_____

_____

Puente con bordes plegados

Dibuja los pliegues y marca dónde van las monedas.

Puente rediseñado

Dibuja los pliegues y marca dónde van las monedas.

Resultados de las pruebas

Anota cuántas monedas sostuvo el puente antes de ceder.

Diseño	Construcción	Prueba 1	Prueba 2	Diferencia
Hoja plana				
Bordes plegados				
Puente rediseñado				

Diferencia entre pruebas = resultado mayor menos resultado menor.

Después de rediseñar

¿Qué cambiaron y qué resultados muestran si el cambio funcionó?

_____

_____

Puesta en común

Cada equipo presenta su predicción, muestra los dos prototipos plegados y explica qué cambió entre ellos. Si el primer diseño sostuvo 8 y 9 monedas, y el rediseñado sostuvo 12 y 11, ambos ensayos del rediseño superaron los del primer modelo. **Estos datos son un ejemplo.** Cada equipo defiende su elección con lo que observó en sus propias pruebas.

Si los resultados son cercanos o se contradicen, revisen cómo se realizó cada ensayo. ¿Las monedas quedaron centradas? ¿Las dos piezas del mismo diseño tenían dobleces de la misma altura? Una prueba adicional puede ayudar a decidir si la mejora se repite.

Reflexión didáctica

Los estudiantes descubren que **una misma hoja puede comportarse de manera distinta según su forma**. Lo comprueban al fabricar los puentes, colocar la carga y observar dónde comienza la deformación. Cuando modifican un pliegue y mantienen las demás condiciones, pueden relacionar el cambio del diseño con el resultado de la prueba.

La bitácora les ayuda a pasar de una impresión, como «este puente se ve más firme», a una explicación basada en datos. El aprendizaje se hace visible cuando pueden señalar **qué modificaron, cómo lo comprobaron y qué resultados respaldan su decisión**.

2.2. El marco que perdió su forma

Un equipo prepara un marco cuadrado para exhibir un cartel. Lo arma con cuatro palitos y lo levanta por una esquina. Los palitos conservan su longitud, pero el marco se inclina y el cartel ya no encaja. El reto consiste en recuperar la forma cuadrada y mantenerla **con una sola pieza adicional**.

Reto de construcción. Una diagonal para el marco

Materiales por equipo. Ocho tiras rígidas de cartón o palitos con orificios preparados, una tira más larga para el refuerzo, encuadernadores de patas, regla, escuadra, graduador, papel cuadriculado y lápiz.

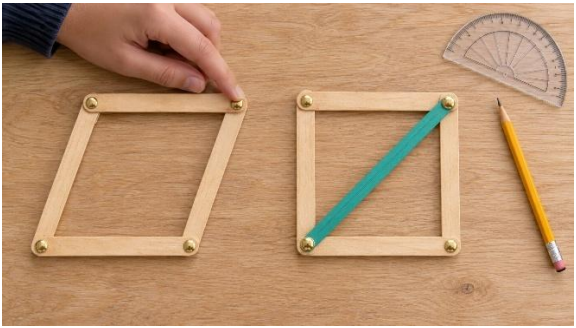


Figura 2.2. *El marco con y sin refuerzo diagonal*

Nota. A la izquierda, los ángulos del marco cambian al empujar una esquina. A la derecha, el palito azul une dos esquinas opuestas, forma dos triángulos y ayuda a mantener la forma cuadrada.

Pregunta del reto. ¿Dónde pondrían la pieza adicional y cuánto debería medir para que el marco conserve su forma?

Diseñar

Dibujen un cuadrado de **10 cm de lado** en papel cuadriculado. Esos 10 cm representan la distancia entre los centros de dos uniones consecutivas. Las tiras deben ser un poco más largas para que los orificios queden dentro del material.

Marquen dos esquinas opuestas y únanlas en el dibujo. Antes de medir la diagonal, estimen su longitud. ¿Bastaría una pieza de 10 cm? ¿Serviría una de 20 cm? Expliquen su predicción y luego calculen la distancia entre las dos esquinas usando el teorema de Pitágoras.

Construir

1. Armen **dos marcos iguales**. Unan las tiras con encuadernadores que les permitan girar y usen la escuadra para formar los cuatro ángulos rectos.

2. Dejen el primer marco tal como está. En el segundo, coloquen una tira diagonal que conecte dos esquinas opuestas. Marquen los puntos de unión de la diagonal a la distancia que calcularon. Comprueben con la escuadra que el refuerzo encaja con el marco en posición cuadrada.

3. Si para colocar la diagonal tienen que inclinar el marco, revisen la distancia **entre los centros de los orificios**. Ajusten la pieza y prueben de nuevo.

Comprobar

Apoyen ambos marcos sobre la mesa. En cada uno, sujeten el lado inferior y empujen suavemente una esquina superior hacia un costado. Observen qué ocurre con la forma. Usen el graduador para comparar el mismo ángulo antes y durante el empuje. Luego retiren la diagonal del segundo marco y repitan la prueba. ¿Qué vuelve a ocurrir?

Prueba final. Recorten un cuadrado de papel del tamaño del hueco interior de uno de los marcos cuando está bien escuadrado. Úsenlo como plantilla para comprobar si ese espacio conserva su forma al empujar cada modelo.

BITÁCORA DE PRUEBA



2.2. El marco que perdió su forma

Equipo: _____ Fecha: _____

1. DISEÑAR

Dibuja el marco y marca dónde irá el refuerzo.

¿Qué crees que pasará al empujar una esquina?

_____

_____

_____

2. CONSTRUIR

Longitud entre los orificios del refuerzo

Estimada _____ cm | **Calculada** _____ cm | **Medida** _____ cm

¿Encajó el refuerzo? ¿Qué ajuste hicieron?

_____

3. COMPROBAR

Midan el mismo ángulo antes y después de empujar.

Marco	Antes	Después
Sin refuerzo	_____ °	_____ °
Con refuerzo	_____ °	_____ °

¿Qué cambió al colocar la diagonal? Usa tus mediciones para explicarlo.

_____

_____

_____

Puesta en común

La diagonal divide el cuadrado en dos triángulos rectángulos. Cada uno tiene dos catetos de 10 cm. Por el teorema de Pitágoras, la diagonal mide $\sqrt{(10^2 + 10^2)} = \sqrt{200} \approx 14{,}14$ **cm** entre los puntos de unión.

En el primer marco, las uniones permiten que los ángulos cambien aunque los cuatro lados mantengan su longitud. Al fijar la diagonal, el marco queda dividido en dos triángulos con lados de longitud fija. Para que el marco se deforme como antes, tendría que cambiar la longitud de una pieza o ceder alguna unión. Por eso, si el marco reforzado todavía se mueve un poco, conviene observar si las tiras se doblan o si los orificios tienen holgura.

Reflexión didáctica

Los estudiantes descubren **por qué cuatro lados de la misma longitud pueden formar figuras con ángulos distintos**. Lo observan al empujar el primer marco y medir una de sus esquinas. Después, el cálculo de la diagonal les permite fabricar una pieza que debe encajar en dos puntos concretos. Si el refuerzo obliga a torcer el marco para colocarlo, tienen una razón visible para revisar su cálculo o su medición.

Al retirar la diagonal y repetir el ensayo, pueden comprobar qué aporta esa pieza. La explicación final reúne el dibujo, la medida y lo que ocurrió con el modelo. A partir de esa experiencia, pueden buscar refuerzos parecidos en **una puerta de madera, una estantería o una estructura del patio** y explicar qué función cumple la diagonal.

2.3. La feria de los dados. Diseñar un juego justo

En la feria del colegio, un puesto ofrece este juego. Se lanzan dos dados y se suman los puntos. Si sale **6**, gana la persona visitante. Si sale **7**, gana quien atiende el puesto. Con cualquier otra suma, se vuelven a lanzar los dados. A simple vista parece justo porque cada persona tiene un número para ganar. **¿Pero tienen la misma oportunidad?**

Materiales. Dos dados de diferente color, cartulina, marcadores, papel cuadriculado y dos tapas de botella para llevar el puntaje.



Figura 2.3 . *Tablero casero para la feria de los dados*

Nota. En los recuadros de color se anotan las sumas que dan un punto a cada participante. Cada tapa avanza una casilla cuando su participante anota. Si una ficha llega al final del

recorrido, el equipo puede seguir registrando los puntos en papel hasta completar los 30 lanzamientos.

Organización. Equipos de tres o cuatro estudiantes.

Reto

Diseñen un puesto para la feria donde dos personas puedan jugar con las **mismas posibilidades de ganar**. La condición es que una persona gane con **una sola suma** y la otra con **dos sumas diferentes**. Construyan el tablero, escriban las reglas y preparen una explicación que convenza a quienes quieran jugar.

Diseñar. Descubrir qué sumas salen de más maneras

Dibujen una cuadrícula de seis filas por seis columnas. Usen las filas para los resultados del dado de un color y las columnas para los del otro. Escriban en cada casilla la suma correspondiente. Por ejemplo, un 2 en el dado azul y un 4 en el rojo

forman una casilla distinta de un 4 en el azul y un 2 en el rojo.

Coloreen las casillas que suman 6 y las que suman 7. Comparen cuántas hay de cada color y decidan si el juego del puesto era justo. Luego busquen **tres sumas distintas** que cumplan la condición del reto. Comprueben que la suma de un jugador ocupa tantas casillas como las dos sumas del otro juntas.

Construir. Abrir el puesto de juego

Pongan un nombre a su juego y diseñen un tablero con dos zonas de color. En cada zona escriban las sumas que le dan un punto a ese jugador. Preparen un marcador para mover las tapas y una tarjeta con las reglas. **Cada lanzamiento vale como máximo un punto.** Si la suma no pertenece a ninguna zona, el marcador se queda en su lugar.

Antes de abrir el puesto, ensayen con tres lanzamientos elegidos por el equipo. Uno debe dar

un punto al primer jugador, otro al segundo y el tercero debe dejar el marcador igual.

Comprobar. Invitar a otro equipo

Intercambien los tableros y jueguen **30 lanzamientos** siguiendo únicamente la tarjeta de reglas. Registren cuántos puntos obtuvo cada jugador y cuántos lanzamientos quedaron sin punto. Después, revisen la cuadrícula del equipo que diseñó el juego. **¿Las dos zonas tienen realmente la misma cantidad de casillas ganadoras?**

Devuelvan el tablero con una observación concreta. Si encontraron una regla ambigua o una suma mal asignada, el equipo debe corregirla y pedir que vuelvan a probar esa parte.

Puesta en común

En el juego inicial, el **6** se obtiene de cinco maneras y el **7**, de seis. Por eso, quien gana con el 7 tiene ventaja. Una solución para el nuevo puesto es

asignar el **7** a un jugador y las sumas **4 y 10** al otro. El 7 ocupa seis casillas de la cuadrícula, mientras que el 4 y el 10 ocupan tres cada uno. Así, ambos jugadores tienen seis resultados favorables de los 36 posibles en cada lanzamiento, si los dados son equilibrados e independientes.

Si después de 30 lanzamientos una persona obtuvo más puntos, comparen ese marcador con la cuadrícula. **¿Cómo puede ser justo el juego aunque termine con un ganador?**

Reflexión didáctica

Los estudiantes descubren por qué contar los números escritos en el tablero puede llevarlos a una decisión equivocada. Al combinar los dados en la cuadrícula, ven que una sola suma puede aparecer de tantas maneras como otras dos juntas. Ese hallazgo les permite tomar una decisión de diseño y defenderla con evidencia. La prueba con otro equipo cumple dos funciones: revela si las reglas se entienden y permite distinguir entre **tener la misma probabilidad de ganar** y **obtener el mismo puntaje en una partida**.

2.4. El tiro imposible de fallar. Matemáticas y física del básquet

Dos estudiantes lanzan desde la misma marca. Un balón golpea la parte delantera del aro y el otro pasa por encima. Ambos apuntaron al mismo lugar. ¿Qué cambió? En esta actividad, el equipo usará la **distancia, la altura y el ángulo** para calcular la velocidad de salida del balón. Después pondrá la predicción a prueba en la cancha.

Materiales. Balón de básquet, aro, cinta métrica, cinta adhesiva o tiza, calculadora en modo grados y un celular para grabar de perfil.



Figura 2.4. *Un lanzamiento de básquet visto de perfil*

Nota. Al grabar de perfil, el equipo puede observar la trayectoria del balón. Para estimar el ángulo de salida, se marcan los centros del balón en dos fotogramas consecutivos justo después de soltarlo. Luego se mide el ángulo que forma la línea que une esos puntos con la horizontal.

Diseñar. Calcular el tiro antes de lanzar

Marquen una posición desde la que puedan tirar con comodidad. Midan la distancia horizontal desde el punto donde el balón sale de las manos hasta el centro del aro. Estimen también, con un

lanzamiento de práctica grabado de perfil, la altura a la que se suelta el balón.

Símbolo	Qué representa
d	Distancia horizontal hasta el centro del aro, en metros
h_0	Altura del centro del balón al soltarlo, en metros
h_a	Altura del aro, en metros
θ	Ángulo de salida medido desde la horizontal
v_0	Velocidad inicial del balón, en metros por segundo
g	Aceleración de la gravedad, aproximadamente 9,8 m/s²

La altura que el balón debe ganar es $\Delta h = h_a - h_0$. Si representamos el balón como un punto y dejamos fuera del cálculo la resistencia del aire, su altura al llegar a la distancia del aro se obtiene así.

$$h_a = h_0 + d\tan\theta - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

El término $d \times \tan(\theta)$ indica cuánto subiría el balón si siguiera recto en la dirección inicial. El último término indica cuánto cae respecto de esa recta por efecto de la gravedad. Al despejar v_0, obtenemos la velocidad de salida que predice el modelo.

$$v_0 = \sqrt{\frac{g d^2}{2\cos^2\theta\,(d\tan\theta - \Delta h)}}$$

Ejemplo. Si el aro está a 3,05 m, el balón sale a 2,00 m de altura y la distancia horizontal es de 4,00 m, entonces debe ganar 1,05 m de altura. Para un tiro a 50°, el modelo predice la siguiente velocidad inicial.

$$v_0 = \sqrt{\frac{9{,}8\,(4{,}00)^2}{2\cos^2(50^\circ)\,[4{,}00\tan(50^\circ) - 1{,}05]}} \approx 7{,}14 \text{ m/s}$$

La fórmula predice por dónde pasaría el centro del balón en condiciones ideales. En la cancha también hay que apuntar hacia el centro del aro y conseguir que el balón llegue bajando con espacio suficiente para entrar.

Construir. Preparar una estación de tiro

Marquen en el piso la posición inicial y coloquen el celular de perfil, a un lado de la trayectoria, de modo que se vean las manos al soltar el balón y el aro. Marquen los centros del balón en dos fotogramas consecutivos justo después de soltarlo. Midan con un graduador el ángulo que forma la línea que une esos puntos con la horizontal.

Hagan cinco tiros desde la misma marca, procurando repetir la altura de salida y acercarse al ángulo elegido. Después de cada intento, anoten dónde llegó el balón. Pueden clasificar el resultado como corto, largo, lateral o encestado.

Tiro	Ángulo aprox	Resultado
1	____ °	
2	____ °	
3	____ °	
4	____ °	
5	____ °	

Comprobar. Cambiar la distancia y volver a calcular

Adelanten la marca un metro. Antes de tirar, predigan cómo cambiará la velocidad necesaria si mantienen el mismo ángulo y la misma altura de salida. Recalculen y hagan cinco intentos más.

En el ejemplo, pasar de 4 m a 3 m, conservando el ángulo de 50°, reduce la velocidad prevista de 7,14 m/s a 6,50 m/s. Revisen los videos. ¿El balón llegó al aro cuando subía o cuando bajaba? ¿Los tiros cortos y largos tuvieron ángulos parecidos? ¿Hubo tiros que fallaron por desviarse hacia un lado?

Reflexión didáctica

La fórmula les permite a los estudiantes hacer una predicción antes de tocar el balón. El video les ayuda a revisar qué pudieron repetir y qué cambió de un lanzamiento a otro. Si dos tiros salen con ángulos parecidos y uno queda corto, pueden investigar si cambió la velocidad o la altura de salida. Si el balón se desvía hacia un lado, descubren que el cálculo describe el movimiento visto de perfil y que la puntería lateral también cuenta. El aprendizaje se hace visible cuando el equipo usa una medición para justificar el ajuste del siguiente tiro.

2.5. La balanza que se equilibra sin pesos iguales

En un lado de una regla hay seis monedas apiladas. En el otro, solo hay tres. El equipo desliza la pila más pequeña hacia el extremo y, de pronto, la regla queda horizontal. ¿Cómo lograron tres monedas equilibrar a seis? El reto consiste en predecir dónde colocar cada pila antes de probarlo.

Nivel sugerido. 9.º y 10.º de EGB.

Materiales. Regla rígida de 30 cm, lápiz de sección triangular o prisma de madera con una arista recta, monedas de la misma denominación y cinta adhesiva para marcar las posiciones.



Figura 2.5. Una balanza en equilibrio

La regla, el borrador y las monedas de 50 centavos quedan en el aula. Abajo, la línea de medición muestra **5 cm a la izquierda y 10 cm a la derecha**. Las marcas indican las distancias del ejercicio, aunque quedan ligeramente desplazadas respecto a las pilas y al borrador.

Organización. Equipos de tres o cuatro estudiantes.

Diseñar. Encontrar la posición de una pila

Apoyen la regla sobre el lápiz o el prisma y deslícenla despacio hasta que se mantenga horizontal sin monedas. Marquen ese punto. Será el **punto de apoyo** y, desde allí, medirán las distancias hasta el centro de cada pila.

Dibujen la regla de perfil en una hoja. Representen seis monedas a 5 cm a la izquierda del apoyo. A la derecha irán tres monedas. Antes de usar la balanza, marquen en su dibujo dónde creen que debe ir la pila más pequeña y expliquen su decisión.

Una pila hace girar la regla alrededor del apoyo. El efecto de giro depende del peso y de la distancia al apoyo. En física, ese efecto se llama **momento de fuerza**. Como todas las monedas de esta actividad tienen el mismo peso, podemos comparar los dos lados multiplicando el número de monedas por la distancia.

Condición de equilibrio

$$n_{\text{izq}} \times d_{\text{izq}} = n_{\text{der}} \times d_{\text{der}}$$

En la fórmula n es el número de monedas y d es la distancia en centímetros desde el apoyo hasta el centro de la pila.

Para el reto inicial, seis monedas situadas a 5 cm producen el mismo efecto de giro que tres monedas situadas a 10 cm.

$$6 \times 4 = 3 \times 10$$

Construir. Poner a prueba la predicción

Coloquen seis monedas a 5 cm a la izquierda del apoyo y tres monedas a 10 cm a la derecha. Sostengan la regla mientras ubican las pilas y suéltenla con cuidado. Registren si queda horizontal o hacia qué lado se inclina.

Si la regla se inclina, comprueben que se equilibra vacía y que las distancias llegan al centro de cada pila. Luego, sin mover la pila de seis monedas, deslicen la de tres hasta obtener el equilibrio. Anoten la distancia observada y compárenla con los 10 cm del cálculo.

Comprobar. Usar la balanza para descubrir una cantidad

Un integrante del equipo prepara, sin mostrar el contenido, una pila de monedas dentro de un sobre opaco liviano. Coloca el sobre a 6 cm a la derecha del apoyo. Los demás ponen un sobre idéntico con cuatro monedas a la izquierda y lo deslizan hasta equilibrar la regla. Registran la distancia y calculan cuántas monedas hay en el sobre cerrado.

Para descontar el efecto de los sobres, equilibren primero la regla con los sobres vacíos a 6 cm a cada lado. Cuando desplacen el sobre de la izquierda durante la prueba, su propio peso también influirá.

Por eso, conviene usar sobres de papel muy liviano y tratar el resultado como una **estimación**. Si la regla queda horizontal con las cuatro monedas a 9 cm, el equipo estimará que el sobre cerrado contiene seis monedas.

$$(5 \times 9) / 6 = 6$$

Abran el sobre y comparen el cálculo con el conteo. Si la estimación queda entre dos números enteros, revisen la distancia y observen cuánto cambia el resultado al mover el sobre unos milímetros.

Puesta en común

Mantengan tres monedas a 10 cm a la derecha. ¿En qué posición colocarían dos monedas a la izquierda para equilibrar la regla? El cálculo da 15 cm. Revisen si la regla permite colocar el **centro** de la pila en ese punto.

Reflexión didáctica

La regla hace visible una relación inversa. Cuando una pila tiene la mitad de monedas, necesita el doble de distancia para equilibrar a la otra. Los estudiantes usan esa relación para predecir una posición, comprobarla y explicar las diferencias entre lo calculado y lo observado. El último reto introduce una decisión de diseño. Si la posición calculada queda en el borde, pueden acercar ambas pilas al apoyo conservando la proporción entre sus distancias.

2.6. ¿Está descuadrada la cancha? El reto de las diagonales

Antes del torneo del colegio, dos equipos miden la cancha de fútbol. Los lados opuestos tienen casi la misma longitud, pero a un estudiante le parece que una esquina está corrida. ¿Cómo pueden comprobarlo sin usar un transportador gigante? La pista está en dos líneas que casi nunca se marcan en una cancha: **las diagonales**.

Materiales. Cinta métrica larga, cuatro conos, papel cuadriculado, lápiz y calculadora.



Figura 2.6. Medición de las diagonales de la cancha de fútbol

Nota. Los conos marcan las cuatro esquinas. Las líneas amarillas indican los recorridos que los estudiantes deben medir con la cinta: de **A a C** y de **B a D**.

Organización. Equipos de cuatro estudiantes. Toda la actividad se realiza caminando, con la cancha libre y desde el nivel del suelo.

Reto

Midan la cancha, dibujen un plano a escala y usen las dos diagonales para determinar si las líneas forman aproximadamente un rectángulo.

Diseñar. Trazar la ruta de medición

Coloquen un cono en cada esquina de la cancha y nómbrenlas **A, B, C y D**, siguiendo el orden del perímetro. En una hoja, hagan un croquis y marquen los cuatro lados y las dos diagonales, **AC** y **BD**.

Antes de medir las diagonales, calculen cuánto debería medir cada una si la cancha fuera rectangular. El largo, el ancho y la diagonal forman un triángulo rectángulo. Por eso pueden aplicar el **teorema de Pitágoras**.

Diagonal esperada = √(largo² + ancho²)

Si una cancha mide **40 m de largo** y **30 m de ancho**, el cálculo es:

Diagonal esperada = $\sqrt{(40^2 + 30^2)} = \sqrt{2500} = 50$ m

Para teclear en la calculadora. √(40^2 + 30^2)

Construir. Medir la cancha y dibujar el plano

Midan los cuatro lados de cono a cono. Si los lados opuestos tienen medidas parecidas, usen el promedio de los dos lados largos y el promedio de los dos lados cortos para calcular la diagonal esperada. Si encuentran diferencias claras, repitan esas mediciones y regístrenlas por separado.

Dibujen el rectángulo de referencia en papel cuadriculado. Para la cancha del ejemplo, funciona una escala de **1 cm en el papel por cada 5 m en la cancha**. Con esa escala, el plano mide **8 cm de largo por 6 cm de ancho**, y cada diagonal debe medir **10 cm** en el papel.

Comprobar. Cruzar la cancha por las diagonales

Midan de **A a C** y de **B a D**. Si la cinta no alcanza, dividan el recorrido en tramos. Una persona, ubicada junto al cono de destino, guiará a sus compañeros para que las marcas intermedias queden en la misma línea recta.

Dato	Medida
Diagonal esperada según el cálculo	___ m
Diagonal AC medida en la cancha	___ m
Diagonal BD medida en la cancha	___ m
Diferencia entre las diagonales medidas	___ m

Comparen las dos diagonales entre sí y con el valor esperado. Si obtienen una diferencia importante, repitan la medición antes de atribuirla al trazado. Una cinta floja, un cono desplazado o un tramo que se salió de la línea pueden cambiar el resultado.

Puesta en común

En la cancha del ejemplo, un equipo obtuvo **49,9 m y 50,1 m**. Otro grupo midió una cancha con lados opuestos parecidos y obtuvo **48 m y 52 m** en las diagonales. ¿En cuál de los dos casos revisarían primero el trazado? ¿Qué medirían de nuevo para defender su conclusión?

Reflexión didáctica

¿Basta con medir los cuatro lados para saber si la cancha está bien trazada? Un rectángulo y un paralelogramo inclinado pueden tener lados de las mismas longitudes. Al comparar las diagonales, los estudiantes descubren que **conocer el tamaño de la cancha y comprobar la forma de sus esquinas son problemas distintos**. El teorema de Pitágoras les permite calcular cuánto debería medir cada diagonal si las esquinas fueran rectas y contrastar esa predicción con lo que midieron en el patio.

La conversación más rica surge cuando los resultados difieren. Si el cálculo da 50 m y las mediciones dan 49,9 m y 50,1 m, ¿qué tan precisa fue la medición? Si obtienen 48 m y 52 m, ¿en qué tramo conviene volver a tender la cinta? Al repetir el procedimiento, los estudiantes pueden observar si la diferencia se mantiene o si cambia al corregir la posición de un cono o la alineación de la cinta. El aprendizaje se hace visible cuando el equipo explica **qué midió, qué predijo y qué evidencia respalda su conclusión**.

2.7. La pista de carritos. ¿Dónde gana más velocidad?

Un carrito baja por una rampa de cartón dividida en dos tramos iguales. A simple vista parece que atraviesa el segundo tramo más rápido que el primero. Pero el movimiento dura tan poco que es difícil comprobarlo mirando una sola vez. Un video grabado de lado permite contar los fotogramas que tarda el carrito en recorrer cada tramo y comparar sus velocidades.

Materiales. Carrito de juguete, cartón rígido, dos libros para elevar un extremo, cinta adhesiva, regla, celular con cámara lenta y una caja de cartón abierta para detener el carrito.



Figura 2.7. *Mini autódromo en el aula*

Una pista azul con semáforo de salida, conos y meta a cuadros, en un aula vacía. Las marcas **A, B y C** delimitan los dos tramos de **60 cm** que se comparan en el ejercicio.

Organización. Equipos de cuatro estudiantes. La pista se monta en el piso del aula y el carrito se suelta siempre desde la misma marca.

Reto

Comprueben si el carrito recorre más rápido el segundo tramo de la rampa y determinen cómo cambia el resultado al aumentar la altura de salida.

Diseñar. Marcar dos tramos iguales

Sobre el cartón, tracen tres líneas transversales. Nombren **A** a la línea de salida, **B** a la línea intermedia y **C** a la línea de llegada. Dejen **30 cm entre A y B** y otros **30 cm entre B y C**.

Antes de probar la pista, hagan una predicción. ¿En cuál de los dos tramos tardará menos el carrito? ¿Por qué?

La **velocidad media** en cada tramo se obtiene dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo empleado.

Velocidad media = distancia ÷ tiempo

Como los tramos tienen la misma longitud, el carrito tendrá mayor velocidad media en el tramo que recorra en menos tiempo.

Construir. Grabar el recorrido

1. Eleven un extremo del cartón con un libro. Fijen la rampa para que quede firme y coloquen la caja al final, después de la línea C.

2. Sitúen el celular de lado, en una posición fija desde la que se vean las tres líneas. Si van a calcular la velocidad en metros por segundo, verifiquen cuántos fotogramas por segundo registra la cámara.

3. Coloquen el **eje delantero** del carrito sobre la línea A. Manténganlo quieto con una tarjeta y levántenla para soltarlo sin empujarlo.

4. Revisen el video fotograma a fotograma. Anoten el número de fotograma en que se suelta el carrito en A y los números en que su eje delantero cruza B y C. Resten los números de fotograma para saber cuánto duró cada tramo.

Ejemplo. Si el video se grabó a **120 fotogramas por segundo** y el carrito tardó **60 fotogramas** en el primer tramo y **30 fotogramas** en el segundo, los resultados serían estos:

Tramo	Distancia	Tiempo	Velocidad media
A–B	0,30 m	60 ÷ 120 = 0,50 s	0,30 ÷ 0,50 = **0,60 m/s**
B–C	0,30 m	30 ÷ 120 = 0,25 s	0,30 ÷ 0,25 = **1,20 m/s**

En este ejemplo, el carrito recorrió el segundo tramo en la mitad del tiempo. Su **velocidad media** en ese tramo fue el doble de la del primero. Si desconocen la frecuencia de la cámara, pueden comparar directamente los fotogramas de ambos tramos dentro del mismo video.

Comprobar. Cambiar la inclinación

Hagan **tres recorridos con un libro** de apoyo. Luego coloquen el segundo libro y repitan los tres recorridos. Mantengan el mismo cartón, el mismo carrito y las mismas marcas. Anoten cuántos

fotogramas dura cada tramo y calculen el promedio de los tres intentos para cada altura.

Comparen los resultados. ¿El tramo B–C fue más rápido en las dos inclinaciones? ¿Qué pasó con el tiempo total de A a C al elevar la rampa? Si un intento se aleja mucho de los otros, revisen el video y comprueben cómo se soltó el carrito y en qué fotograma cruzó cada línea.

Puesta en común

Dos equipos observaron que el carrito tardó **60 fotogramas** en un tramo de 30 cm. Un equipo grabó a **60 fotogramas por segundo** y el otro a **120**. ¿Los carritos recorrieron el tramo en el mismo tiempo? Calculen cuánto tardó cada uno y expliquen cuál iba más rápido.

Reflexión didáctica

El video permite examinar un movimiento que el ojo apenas alcanza a seguir. Al dividir la rampa en tramos iguales, los estudiantes pueden sostener una afirmación concreta: en el tramo que duró menos, el carrito tuvo mayor velocidad media. La repetición les permite distinguir un resultado que se mantiene de un intento que conviene revisar. Al comparar las dos inclinaciones, el equipo debe justificar su conclusión con los tiempos que obtuvo y explicar cómo se aseguró de que ambos montajes pudieran compararse.



CAPÍTULO III

Diseñar, probar y defender una solución

3.1. El desafío de la caja. ¿Cuánto cabe en una cartulina?

Para la feria del colegio, tres equipos reciben una cartulina cuadrada del mismo tamaño. Cada equipo debe transformarla en una caja sin tapa para guardar las fichas del juego. Un equipo quiere hacer paredes altas. Otro prefiere dejar una base ancha. Los dos aseguran que en su caja cabrá más. **¿Cómo saber cuál tiene razón antes de cortar la cartulina?**

Materiales. Cartulinas de 30 × 30 cm, regla, escuadra, lápiz, tijeras, cinta adhesiva y calculadora.

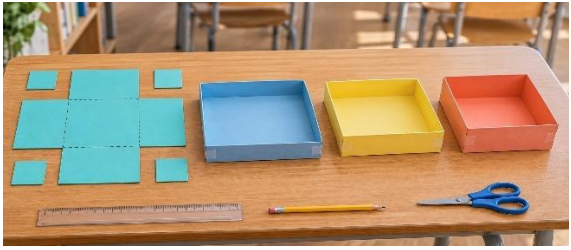


Figura 3.1. *De una cartulina plana a tres cajas sin tapa*

Nota. Las líneas punteadas indican por dónde doblar la cartulina después de recortar las cuatro esquinas. De izquierda a derecha, las cajas azul, amarilla y coral representan cortes de **4 cm, 5 cm y 6 cm**, respectivamente. A medida que las paredes ganan altura, la base se hace más pequeña.

Organización. Equipos de tres o cuatro estudiantes.

Reto

Diseñen una caja sin tapa que aproveche al máximo la cartulina. Todos los equipos partirán de una lámina de **30 × 30 cm** y recortarán **cuatro cuadrados iguales**, uno en cada esquina. Gana el diseño con el **mayor volumen entre los modelos comparados**.

Diseñar. Predecir qué caja tendrá mayor volumen

Dibujen la cartulina y marquen los cuatro cuadrados que recortarían. Llamen **x** al lado de cada cuadrado. Al levantar las cuatro solapas, esa

medida será la altura de la caja. Cada lado de la base perderá **x** centímetros en un extremo y otros **x** en el otro.

Lado de la base = 30 − 2 × x

Volumen de la caja = largo de la base × ancho de la base × altura

Si cortan cuadrados de **4 cm**, la base medirá **22 × 22 cm** y la caja tendrá **4 cm de altura**. Su volumen previsto será **22 × 22 × 4 = 1936 cm³**.

Antes de revisar los otros diseños, hagan una predicción. ¿Qué pasará con el volumen si aumentan el corte a 5 o 6 cm? Expliquen qué medida aumenta y cuáles disminuyen.

Lado del cuadrado recortado	Base de la caja	Altura	Volumen previsto
4 cm	22 × 22 cm	4 cm	1936 cm^3
5 cm	20 × 20 cm	5 cm	2000 cm^3
6 cm	18 × 18 cm	6 cm	1944 cm^3

Construir. Pasar del dibujo a la caja

Repartan los tres diseños entre los equipos. En cada cartulina, tracen los cuatro cuadrados del tamaño asignado y recórtenlos. Marquen las líneas de doblez con ayuda de la regla, levanten las solapas y unan las esquinas con cinta adhesiva por fuera. Usen la escuadra para verificar que las paredes formen ángulos rectos con la base.

Coloquen juntas las tres cajas. Antes de mostrar los cálculos, pidan a otro equipo que ordene los modelos de menor a mayor capacidad solo con mirarlos. Luego comparen ese orden con el de la tabla.

Comprobar. Medir la caja que realmente construyeron

Midan por dentro el largo, el ancho y la altura de cada caja. Calculen el volumen con esas medidas y compárenlo con la predicción. Si hay diferencias, revisen dónde doblaron la cartulina, cuánto se desviaron los cortes y si las paredes quedaron verticales.

Diseño	Volumen previsto	Volumen según las medidas interiores	¿Qué explica la diferencia?
Corte de 4 cm			
Corte de 5 cm			
Corte de 6 cm			

Puesta en común

En el cálculo inicial, la caja con corte de **5 cm** supera a la de **6 cm** por solo **56 cm³**. ¿Sus mediciones conservaron ese orden? Si los resultados quedaron muy cerca, ¿cuánta precisión necesitarían para afirmar que una caja tiene mayor capacidad?

Como reto adicional, prueben en la calculadora cortes de **4,5 cm** y **5,5 cm**. ¿Alguno mejora el diseño de 5 cm? Expliquen qué pueden concluir a partir de los tamaños que compararon.

Reflexión didáctica

El momento más revelador ocurre cuando los estudiantes ven que la caja más alta puede tener menos capacidad. Un corte mayor levanta las paredes y, al mismo tiempo, reduce el largo y el ancho de la base. Para decidir cuál diseño conviene, el equipo debe considerar cómo cambian juntas las tres dimensiones.

La construcción también le da sentido a la diferencia entre una predicción y una medición. Si dos cajas quedan casi empatadas, una línea doblada unos milímetros fuera de lugar puede cambiar el resultado observado. La tarea termina cuando los estudiantes pueden defender **qué diseño elegirían, con qué datos lo justifican y qué efecto tuvo la precisión de su trabajo**.

3.2. El tren de cartón. ¿Podemos llegar a la hora prevista?

En la feria del colegio, un tren de cartón llevará un mensaje de una estación a otra. La estación de llegada abrirá sus puertas durante un segundo. Cada equipo deberá calcular cuándo llegará su tren, construir una vía para ensayar el recorrido y ajustar su forma de moverlo hasta cumplir el horario.

Materiales. Una cajita de cartón liviana, hilo, cinta adhesiva, cinta métrica, cronómetro y una ficha de papel para transportar en el tren.



Figura 3.2. *El tren de cartón y su recorrido de dos metros*

Nota. La cinta adhesiva marca la salida (0 m), el punto de control (1 m) y la estación de llegada (2 m). El tren lleva una ficha de papel y se mueve tirando suavemente del hilo.

Organización. Equipos de tres o cuatro estudiantes. Una persona mueve el tren, otra cronometra y otra registra los datos. Si hay un cuarto integrante, puede observar el cruce por las marcas. La misma persona moverá el tren durante la calibración y las pruebas de cada serie.

Reto

Construyan un tren que recorra **2 metros** y llegue a la estación entre **4,5 y 5,5 segundos** después de la salida. El tren debe llevar la ficha durante todo el recorrido y mantener el movimiento hasta cruzar la llegada. Antes de hacer la prueba completa, calculen cuánto tardaría según lo que midieron en el primer metro.

Diseñar. Calcular el horario del tren

Para recorrer los 2 metros en 5 segundos, el tren necesita una velocidad media de:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{2\ \text{m}}{5\ \text{s}} = 0,40\ \text{m/s}$$

Marquen en el piso la **salida (0 m)**, el **punto de control (1 m)** y la **estación de llegada (2 m)**. ¿En qué tiempo debería pasar por el punto de control si mantiene el mismo ritmo durante todo el recorrido? Escriban su predicción antes de hacer el primer ensayo.

Construir. Calibrar el tren en el primer metro

Aten el hilo a la parte delantera de la caja y coloquen la ficha en su interior. Alineen el borde delantero del tren con la salida. Tiren del hilo con suavidad e intenten mantener un ritmo regular. Inicien el cronómetro cuando la caja empiece a

moverse y registren el tiempo cuando su borde delantero cruce la marca de 1 metro.

Hagan **tres ensayos de 1 metro** y calculen el tiempo promedio. Utilicen ese dato para estimar la velocidad media del tren y predecir cuánto tardaría en recorrer los 2 metros si mantuviera el mismo ritmo.

Ejemplo resuelto. Un equipo registra 2,8 s, 2,9 s y 3,0 s en sus tres ensayos de 1 metro.

Cálculo	Operación	Resultado
Tiempo promedio del primer metro	(2,8 + 2,9 + 3,0) ÷ 3	2,9 s
Velocidad media estimada	1 ÷ 2,9	0,34 m/s, aproximadamente
Tiempo previsto para 2 metros al mismo ritmo	2 × 2,9	5,8 s

El tren llegaría **0,3 segundos después del cierre** de la estación. El equipo decide tirar del hilo un poco más rápido desde la salida y tomar **2,5 segundos en el punto de control** como referencia.

Comprobar. Probar el horario y ajustar el recorrido

Realicen un recorrido completo con el ritmo que calibraron. Registren el tiempo de llegada y compárenlo con su predicción. Luego decidan qué ajuste necesitan. Si el tren llega tarde, aumenten el ritmo. Si llega antes, redúzcanlo. Mantengan la misma vía, el mismo tren y la misma ficha. Hagan **dos intentos con el ritmo ajustado** para comprobar si pueden repetir el resultado.

Recorrido de 2 m	Tiempo de llegada	¿Llegó entre 4,5 y 5,5 s?	Ajuste realizado
Prueba inicial			
Primer intento con ajuste			
Segundo intento con ajuste			

Si los dos intentos ajustados dan resultados muy diferentes, revisen si el tirón fue uniforme y si el cronómetro se inició y se detuvo con el mismo criterio. Repitan el recorrido para comprobarlo.

Puesta en común

Presenten su vía y hagan una demostración. Expliquen qué tiempo predijeron, qué tiempo obtuvieron y qué cambiaron para acercarse a los 5 segundos. Si solo uno de los dos intentos ajustados cumplió el horario, ¿qué les dicen sus mediciones sobre la regularidad del movimiento?

Reflexión didáctica

La fórmula orienta una decisión que los estudiantes pueden probar de inmediato. Medir el primer metro les permite anticipar la llegada y elegir cómo tirar del hilo. Al comparar la predicción con el recorrido completo, descubren que duplicar la distancia permite estimar el doble de tiempo **si se mantiene la misma velocidad media**. La segunda prueba con el ritmo ajustado les permite comprobar si pueden repetir la llegada dentro del horario.

3.3. Mosaico secreto. ¿Puedes dibujar con fracciones?

Un equipo diseña un cohete, un robot o un personaje de videojuego con piezas de colores. Otro equipo recibe únicamente la receta de colores escrita en fracciones. **¿Podrá construir una figura completamente distinta con la misma receta?**

Materiales. Una cuadrícula de 6 × 8 casillas por equipo, cuadrados de papel de cuatro colores del tamaño de las casillas, tijeras y lápiz.

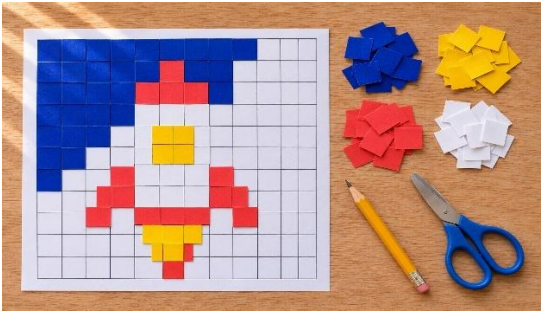


Figura 3.3. *Un cohete hecho con cuadrados de papel*

Nota. La imagen ilustra cómo se arma el mosaico. Para realizar el reto, usen una cuadrícula de **6 × 8 casillas** y calculen cuántas piezas necesitan de cada color.

Organización. Equipos de tres o cuatro estudiantes. Las piezas se colocan sueltas para poder moverlas durante el reto.

Diseñar. Preparar la receta de colores

La cuadrícula completa representa **un entero**. Antes de crear la figura, calculen cuántas piezas necesitan de cada color.

Color	Piezas iniciales	Piezas después del cambio	Fracción final
Azul	24	18	3/8
Amarillo	12	18	3/8
Rojo	8	8	1/6
Blanco	4	4	1/12

Construir. Crear el mosaico secreto

Elijan qué figura quieren representar. Pueden usar las piezas azules como fondo y distribuir los otros colores para formar la figura. Si el dibujo cuesta reconocerlo, muevan las piezas hasta que aparezca la silueta sin cambiar la cantidad de cada color.

Cuando terminen, oculten el diseño y entreguen **solo la receta** a otro equipo. Su misión será construir una figura diferente que cumpla las mismas fracciones. Coloquen ambos diseños lado a lado y cuenten las piezas para comprobar si los dos respetaron la receta.

Comprobar. Cambiar el dibujo con una sola jugada

La nueva misión es que **el azul y el amarillo ocupen la misma fracción del tablero**. Para conseguirlo, solo pueden sustituir piezas azules por amarillas. Las piezas rojas y blancas se quedan donde están.

Antes de mover las piezas, anoten cuántas creen que deberán cambiar. Hagan el cambio y comprueben su respuesta. Después, escriban la nueva fracción que ocupa cada color y simplifíquenla.

Puesta en común

Un equipo propuso cambiar **12 piezas azules**, porque al inicio había 12 azules más que amarillas. Prueben esa idea en el tablero. ¿Cuántas quedan de cada color? ¿Cuántas piezas deben cambiar realmente para que ambos colores ocupen el mismo espacio?

Reflexión didáctica

En la primera parte, dos mosaicos pueden verse muy distintos y conservar las mismas fracciones porque contienen la misma cantidad de piezas de cada color. En el último reto, la manipulación hace visible una segunda idea: **cada sustitución quita una pieza azul y suma una amarilla**, así que la diferencia disminuye de dos en dos. Después de seis cambios quedan 18 piezas de cada color, y cada uno ocupa **18/48 = 3/8** del tablero.

3.4. El puente entre dos sillas. ¿Alcanza la cuerda?

Dos sillas separadas por **120 cm** representan las orillas de un río. Para unirlas, el equipo dispone de dos tramos de cuerda. El primero mide **5/8** de la distancia entre las sillas y el segundo mide **7/12** de esa misma distancia. Para unir los tramos, hay que superponer sus extremos en una longitud equivalente a **1/6** de la distancia inicial.

¿Alcanzará la cuerda para unir las dos orillas? ¿Cuánto sobrará o faltará?

Materiales. Dos sillas, cuerda, cinta métrica, tijeras, cinta adhesiva y una pinza grande.



Figura 3.4. *El puente de cuerda entre dos sillas*

Nota. Las marcas en los respaldos indican los 120 cm que debe cubrir la cuerda. La pinza sujeta los extremos superpuestos de los dos tramos.

Organización. Equipos de tres o cuatro estudiantes.

Diseñar. Calcular antes de cortar

Pongan una marca de cinta adhesiva en cada respaldo y separen las sillas hasta que haya **120 cm entre las marcas**. Esa distancia es el **entero de referencia** para las tres fracciones del ejercicio.

Para calcular qué longitud corresponde a cada fracción, apliquen esta fórmula.

$$\text{Parte} = (\text{cantidad total} \div \text{denominador}) \times \text{numerador}$$

El **denominador** indica en cuántas partes iguales se divide el entero. El **numerador** indica cuántas de esas partes se toman. Por ejemplo, para calcular **5/8 de 120 cm**, dividan los 120 cm en **8** partes de 15 cm y tomen **5** de ellas. El primer tramo mide **75 cm**.

Calculen ahora la longitud del segundo tramo y la medida de la superposición. Antes de cortar, anoten su predicción. **¿La cuerda alcanzará?**

¿Cuántos centímetros creen que sobrarán o faltarán?

Construir. Tender la cuerda entre las sillas

1. Midan y corten los dos tramos según sus cálculos.

2. Extiendan las cuerdas sobre una mesa y superpongan los extremos en la longitud calculada. Sujétenlos con la pinza para mantener fija la unión.

3. Dos integrantes sostienen la cuerda recta a la altura de las marcas, sin mover las sillas. Alineen un extremo con la primera marca y observen dónde queda el otro.

4. Midan cuántos centímetros sobran o faltan para llegar a la segunda marca. Comparen la medición con su predicción. Si difieren, revisen las longitudes de los tramos y cuánto se superpusieron.

Comprobar. Ejercicio resuelto

Paso 1. Calcular las longitudes en centímetros

Qué se mide	Fracción de 120 cm	Aplicación de la fórmula	Longitud
Primer tramo	5/8	(120 ÷ 8) × 5	75 cm
Segundo tramo	7/12	(120 ÷ 12) × 7	70 cm
Parte superpuesta	1/6	(120 ÷ 6) × 1	20 cm

Los dos tramos suman **145 cm**. Al superponerlos, los 20 cm de la unión quedan incluidos en la medida de ambos tramos. Por eso se restan una vez.

$$\text{Longitud útil} = 75 + 70 - 20 = \boxed{125 \text{ cm}}$$

Paso 2. Resolver la misma operación con fracciones

El menor múltiplo común de **8, 12 y 6** es **24**. Para expresar cada fracción en veinticuatroavos, multipliquen su numerador y su denominador por el mismo número.

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}, \qquad \frac{7}{12} = \frac{7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{14}{24}, \qquad \frac{1}{6} = \frac{1 \times 4}{6 \times 4} = \frac{4}{24}$$

Como todas las partes tienen el mismo tamaño, sumen o resten los **numeradores** y conserven el **denominador 24**.

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} - \frac{1}{6} = \frac{15 + 14 - 4}{24} = \frac{25}{24} = 1 + \frac{1}{24}$$

Respuesta. La cuerda cubre toda la distancia entre las sillas y sobra **1/24** de esa distancia.

Como **120 ÷ 24 = 5**, el extremo de la cuerda debe sobrepasar la segunda marca en **5 cm**.

Puesta en común. Un puente más largo

Ahora separen las sillas hasta que las marcas queden a **130 cm**. Usen los mismos dos tramos de cuerda. **¿Cuál es la mayor longitud que pueden superponer para que la cuerda todavía alcance?** Calculen primero y luego deslicen la pinza para comprobarlo.

Respuesta para el docente. Los tramos suman **145 cm**. Si deben quedar **130 cm** de cuerda útil, pueden superponer como máximo **15 cm**. Con esa superposición, los extremos coinciden con las marcas de ambas sillas.

Reflexión didáctica

Al cortar la cuerda, los estudiantes comprueban que el **denominador** determina el tamaño de cada parte y el **numerador** indica cuántas partes deben medir. Al superponer los tramos, pueden ver por qué se resta la longitud de la unión. Finalmente, contrastan dos formas de resolver el mismo problema: medir en centímetros y operar con fracciones equivalentes. Ambas predicen el mismo resultado, que el equipo puede verificar entre las dos sillas.

3.5. ¿Cuántos cabemos? Un reto de área con el cuerpo

Dibujen un triángulo, un rectángulo y un círculo en el piso. Las tres figuras tendrán prácticamente la misma área. El reto es descubrir **cuántas personas caben de pie en cada una**. Primero entren al rectángulo, luego muévanse al triángulo y finalmente al círculo. Antes de pasar a la siguiente figura, anoten cuántas personas quedaron dentro y cómo se acomodaron.

Materiales. Cinta métrica, cinta adhesiva o tiza, cuerda y una hoja de registro.



Figura 3.5. *¿Cuántos cabemos?*

Nota. Los estudiantes se acomodan dentro del círculo mientras una compañera registra el conteo. La escena ilustra cómo se realiza el reto con las tres figuras.

Espacio. Patio o aula despejada.

Diseñar. Tres figuras con la misma área

Figura	Medidas para trazarla	Cálculo del área
Rectángulo	3 m de largo y 2 m de ancho	$3 \times 2 =$ **6 m²**
Triángulo	4 m de base y 3 m de altura perpendicular	$(4 \times 3) \div 2 =$ **6 m²**
Círculo	Radio de 1,38 m	$\pi \times 1{,}38^2 \approx$ **5,98 m²**

Para dibujar el triángulo, marquen el punto medio de la base y midan desde allí los 3 m de altura. Para trazar el círculo, una persona sostiene un extremo de la cuerda en el centro y otra recorre el borde con la tiza, manteniendo la cuerda estirada a **1,38 m**.

Antes de entrar, cada equipo escribe su predicción. **Si las tres figuras tienen casi la misma área, ¿cabrá el mismo número de personas?**

Experimentar. Entrar, contar y cambiar de figura

1. Usen el **mismo grupo de participantes** en las tres figuras. Dos compañeros observan y registran desde fuera.

2. Entren al **rectángulo** uno por uno. Para contar, cada persona debe tener ambos pies completamente dentro, sin pisar la línea ni tocar a otra persona. Deténganse cuando la siguiente persona ya no pueda entrar siguiendo esas reglas.

3. Anoten el resultado. Permitan ahora que el grupo se reorganice y pruebe si entra alguien más. Registren el segundo resultado y dibujen rápidamente cómo quedaron distribuidos.

4. Repitan el procedimiento en el **triángulo** y después en el **círculo**. Mantengan las mismas reglas en las tres pruebas.

Figura	¿Cuántos creemos que caben?	Primer intento	Después de reorganizarnos	¿Dónde quedó espacio libre?
Rectángulo				
Triángulo				
Círculo				

Comprobar. ¿En cuál aprovechamos mejor el espacio?

Para comparar los resultados, dividan la cantidad de personas que entraron en el segundo intento entre el área de la figura.

Personas por metro cuadrado = número de personas ÷ área de la figura

Por ejemplo, si en el rectángulo entraron **12 personas**, el resultado es **12 ÷ 6 = 2 personas por metro cuadrado**. Ese valor expresa el promedio para toda la figura. Cada equipo hará el cálculo con sus propios datos.

Puesta en común

- ¿En qué figura entraron más personas? ¿Coincidió con su predicción?
- ¿En qué figura ganaron más espacio al reorganizarse? ¿Qué hicieron?
- Miren sus dibujos. ¿Dónde quedó espacio libre en las esquinas del rectángulo, cerca del vértice del triángulo y junto al borde del círculo?

Reflexión didáctica

La actividad invita a poner a prueba una idea intuitiva: si dos figuras tienen la misma área, ¿debería caber en ellas la misma cantidad de personas? Al pasar del rectángulo al triángulo y al círculo, los estudiantes pueden observar dónde quedan espacios libres y explicar por qué algunos son difíciles de ocupar. Por ejemplo, cerca del vértice del triángulo puede quedar una porción de piso en la que una persona no logra colocar ambos pies dentro de la figura. El segundo intento permite comprobar cuánto influye la manera de acomodarse. Si después de reorganizarse entra una persona más, el área sigue siendo la misma y el grupo puede señalar qué cambió en su distribución. Si los conteos coinciden entre dos figuras, los dibujos ayudan a examinar cómo se distribuyó el espacio libre en cada una. Al justificar sus respuestas con los conteos y los dibujos, los estudiantes relacionan el área que calcularon con la forma en que usaron el espacio.

3.6. El encuentro secreto. ¿En qué punto se cruzarán?

Dos estudiantes se colocan en extremos opuestos de una pista marcada en el patio. Uno avanza **dos casillas por turno** y el otro avanza **una casilla por turno**. Antes de que se muevan, cada equipo debe colocar una tarjeta en el punto donde cree que se encontrarán y escribir en qué turno ocurrirá.

Materiales. Cinta adhesiva o tiza, cinta métrica, tarjetas de colores y hoja de registro.



Figura 3.6. *El encuentro secreto.*

Nota. Dos estudiantes avanzan en sentidos opuestos mientras el equipo registra sus posiciones. La tarjeta amarilla señala el punto donde predijeron que se cruzarían.

Espacio. Patio o pasillo despejado.

Diseñar. Trazar la pista y hacer una predicción

Marquen en el piso una recta del **0 al 12**, con **50 cm entre marcas consecutivas**. Dibujen dos carriles paralelos junto a la recta para que los participantes puedan cruzarse. Cada marca numerada debe quedar a la misma altura en los dos carriles.

- **Participante A.** Sale de la marca **0** y avanza dos casillas hacia el 12 en cada turno.
- **Participante B.** Sale de la marca **12** y avanza una casilla hacia el 0 en cada turno.

Cada equipo coloca su tarjeta junto a una marca de la pista y anota el turno en que espera ver a los dos participantes a la misma altura.

Experimentar. Caminar, detenerse y anotar

Una persona da la señal para iniciar cada turno. Los participantes caminan de manera que ambos completen su avance al final de la misma cuenta de dos segundos. Al terminar cada turno, se detienen y el equipo registra sus posiciones. La salida corresponde al **turno 0**.

Turno	Posición de A	Posición de B	Casillas de separación
0	0	12	12
1			
2			
3			
4			

Cuando ambos queden a la misma altura, comparen el número de la pista y el turno con lo que escribieron en su tarjeta. Si su predicción fue distinta, revisen la última columna. ¿Cuántas casillas se acortó la distancia en cada turno?

Comprobar. Calcular el encuentro

Si **t** representa los turnos transcurridos, la posición de cada participante se puede calcular así:

Posición de A = 2 × t
Posición de B = 12 − t

En el encuentro, las dos posiciones son iguales.

2 × t = 12 − t
3 × t = 12
t = 4

En el **turno 4**, A llega a la marca **2 × 4 = 8** y B llega a la marca **12 − 4 = 8**. El encuentro ocurre en la **marca 8**, a **4 metros de la salida de A**.

Nuevo reto. ¿Y si se cruzan entre dos marcas?

Esta vez, B sale de la **marca 11** y ambos conservan su ritmo. Vuelvan a colocar sus tarjetas, aunque ahora pueden ubicarlas **entre dos marcas**. Para comprobar la predicción, caminen de forma continua durante cada turno y observen dónde

quedan a la misma altura, aunque la señal de pausa todavía no haya sonado.

Respuesta para el docente. Al terminar el tercer turno, A está en la marca 6 y B en la marca 8. Al terminar el cuarto turno, A está en la marca 8 y B en la marca 7. Ya han intercambiado posiciones, así que se cruzaron durante el cuarto turno. Si ambos mantienen un ritmo constante, el cálculo **$2 \times t = 11 - t$** da **$t = 3\frac{2}{3}$** y sitúa el encuentro en la **posición $7\frac{1}{3}$**, a un tercio del tramo entre las marcas 7 y 8.

Reflexión didáctica

La ecuación surge de algo que los estudiantes pueden ver en el patio. Cada vez que A avanza dos casillas y B avanza una en sentido contrario, la distancia entre ellos se reduce en tres casillas. Al cambiar la salida de B, aparece una pregunta nueva: ¿cómo sabemos que se encontraron si la tabla nunca muestra la misma posición? Ver que intercambiaron el orden permite ubicar el encuentro entre dos registros. La ecuación ayuda a precisar el lugar que el grupo observó mientras caminaban.

Índice

Prólogo 4
Nota editorial 7
José Ricardo Pérez Cueva 10
Luis Enrique Tipan Pinta 11
Jhonny Gabriel Guerrón Luzón 12
Introducción 13
CAPÍTULO I 18
Aprender matemáticas haciendo 18
1.1. ¿Qué significa aprender matemáticas haciendo? 19
1.2. Del material concreto a la expresión matemática 26
1.3. Resolver problemas y justificar decisiones 31
1.4. Formular conjeturas y ponerlas a prueba 38
1.5. Revisar y corregir a partir del error 43
1.6. Comunicar y comprobar un procedimiento 49
1.7. Los ángulos que nos rodean 55
CAPÍTULO II 62

2.1. Un puente de papel que resista más.....63
2.2. El marco que perdió su forma.....70
2.3. La feria de los dados. Diseñar un juego justo 78
2.4. El tiro imposible de fallar. 84
2.5. La balanza que se equilibra sin pesos iguales 91
2.6. ¿Está descuadrada la cancha?..... 98
2.7. La pista de carritos. 105
CAPÍTULO III..... 112
3.1. El desafío de la caja. 113
3.2. El tren de cartón. 120
3.3. Mosaico secreto. 127
3.4. El puente entre dos sillas. 132
3.5. ¿Cuántos cabemos? 140
3.6. El encuentro secreto. 146
Referencias..... 154

Referencias

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7–74. https://doi.org/10.1080/0969595980050102 doi.org

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380–400. https://doi.org/10.1037/a0031084 openurl.ebsco.com

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131.

https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z doi.org

Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., & Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 111*(23), 8410–8415. https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111 pubmed.ncbi.nlm.nih.gov

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational Psychology Review, 26*(1), 9–25. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9249-3 pc.cogs.indiana.edu

Garfunkel, S., & Montgomery, M. (Eds.). (2019). *GAIMME: Guidelines for assessment and instruction in mathematical modeling education* (2nd ed.). Consortium for Mathematics and Its Applications & Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9781611975741 www.siam.org

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Heinemann. www.heinemann.com

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates. www.routledge.com

Ministerio de Educación del Ecuador. (2016). *Currículo de EGB y BGU: Matemática*. PDF oficial educacion.gob.ec

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. www.nctm.org

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822 www.nationalacademies.org

Pólya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press. (Trabajo original publicado en 1945). press.princeton.edu

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual

knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review, 27*(4), 587–597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x uni-trier.de

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press. shop.elsevier.com

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide* (NCEE 2010-4039). National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. files.eric.ed.gov

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five

practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675 education.ucdavis.edu

¿Cuántas personas caben en figuras de igual área? ¿Cómo se puede anticipar el encuentro de dos personas que avanzan a ritmos distintos? Este libro parte de preguntas como estas para llevar la matemática al aula y al patio.

Con cuerdas, mosaicos y modelos de cartón, los estudiantes formulan predicciones, miden, calculan y comprueban sus resultados. Cada reto ofrece a docentes y futuros educadores una manera de vincular fracciones, geometría y álgebra con experiencias que los estudiantes pueden explicar y repetir.

EDITORIAL Mundos Alternos
ISBN: 978-9942-593-71-9
9 789942 593719